**MAP 413 - 1o. Semestre de 2020**

**3a. lista de exercícios**

**1.** Seja
$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^N} \exp\{-|x|^2/4t\}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^N.$$
Mostre que se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ então
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) K(x-y,t)\,\mathrm{d}y$$
é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^N \times ]0,\infty[$.

*Sugestão:* Fixados $0 < a < b$ e $R > 0$ verifique que dados $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $k \in \mathbb{Z}_+$ existem constantes $C > 0$, $c > 0$, $\rho > 0$ (que dependem de $a, b, R, \alpha$ e $k$) tais que
$$|D_x^\alpha D_t^k K(x-y,t)| \le C \exp\{-c|y|^2\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,\, |x| \le R,\, |y| \ge \rho,\; t \in [a,b],$$
e mostre que a conclusão do exercício segue desta propriedade.

**2.** Verifique que a solução limitada do problema
$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times ]0,\infty[; \\ u(x,0) = u_0(x), & u_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$
é dada por
$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x - 2\sqrt{t}y)\, e^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y.$$
Mostre então que se existirem constantes $M, \delta > 0$ tais que
$$|u_0(x)| \le M e^{-\delta|x|^2},\, x \in \mathbb{R}^N,$$
então
$$|u(x,t)| \le M(1+4\delta t)^{-N/2} e^{-\delta|x|^2/(1+4\delta t)}.$$
Conclua que se $u_0$ tiver suporte compacto então
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \text{ uniformemente para } x \in \mathbb{R}^N.$$

**3.** Sejam
$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{-x^2/4t\}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}$$
e
$$v(x,t) = \frac{\partial K}{\partial x}(x,t).$$

Mostre que $v$ satisfaz $v_t - v_{xx} = 0$ em $t > 0$ e também que $v(x,t) \to 0$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado. Mostre também que $v$ não é limitada, calculando seus valores ao longo da parábola $x^2 = 4t$. Interprete este resultado tendo em vista o resultado de unicidade provado em aula.

**4.** Sejam $L > 0$ e $\Omega = ]0, L[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$. Suponha que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaça

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ em } \Omega;$$

$$u_x(0,t) = 0, \ \ t \geq 0.$$

Para cada $T > 0$ defina

$$\Gamma = ([0, L] \times \{0\}) \cup (\{L\} \times [0, T]) \,.$$

Mostre que

$$\max_{[0,L]\times[0,T]} u = \max_{\Gamma} u \,.$$

**5.** Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t - t\Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times ]0, \infty[; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \, u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, \infty[)$.

**6.** Resolva o problema do calor para a barra semi-infinita

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \, x > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \geq 0; \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Aqui $u_0$ é contínua e limitada em $[0, \infty[$ e satisfaz $u_0(0) = 0$.