MAP 413 - 1o. Semestre de 2020

2a. lista de exercícios

1. Mostre que o problema
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$
possui solução $u \in C^\infty([0,L]\times]0,\infty[) \cap C([0,L]\times[0,\infty[)$ se $u_0 \in C([0,L])$ é derivável quase sempre e $u_0' \in L^2([0,L])$. *Sugestão:* lembrar a desigualdade de Bessel.

2. Demonstre a *fórmula de Parseval:*
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \quad f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

3. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e dado $h \in \mathbb{R}^N$ defina $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$. Utilize a fórmula de Parseval (exercício 2) para mostrar que
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

4. Demonstre a seguinte desigualdade: existe uma constante $C > 0$ tal que
$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}\right\}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
Sugestão: Inicie estimando
$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |(1+i\xi)\hat{f}(\xi)|\frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi$$
e aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

5. Dadas $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ linear inversível defina $g = f \circ A$. Mostre que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e calcule $\hat{g}$ em termos de $\hat{f}$. Conclua $(\Delta f)\circ A = \Delta(f \circ A)$ se A é uma transformação ortogonal.

6. Mostre que a aplicação $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto f - \Delta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é uma bijeção.

7. Sejam $u, v \in C(\mathbb{R}^N)$, ambas se anulando no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$. Mostre que $u \star v$ também se anula no complementar de um compacto de $\mathbb{R}^N$.

Sugestão: Suponha que u se anula no complementar do compacto K_1 e que v se anula no complementar do compacto K_2. Mostre que $K_1 + K_2 \doteq \{x + y : x \in K_1,\, y \in K_2\}$ é compacto e que $u \star v$ se anula no complementar de $K_1 + K_2$.

8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e u uma função de classe C^2 em

$\bar{\Omega} \times [0, \infty[$ satisfazendo o problema

$$(\star) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[; \\ u(x, 0) = u_0(x); & \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty[. \end{cases}$$

Mostre que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\vec{\nabla}_x u(x, t)|^2 \mathrm{d}x, \quad t \geq 0,$$

é uma função decrescente e conclua, daí, a unicidade do problema $(\star)$.