MAP 413 - 1o. Semestre de 2020

1a. lista de exercícios

1. Seja Ω um aberto regular de $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe C^∞. Usando a identidade

$$|\vec{\nabla} v|^2 + 2\,\mathrm{div}\Big((u-v)\vec{\nabla} u\Big) = |\vec{\nabla} u|^2 + |\vec{\nabla}(u-v)|^2 + 2(u-v)\Delta u,$$

válida para $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, mostre que se $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{em } \Omega; \\ u_0 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u_0 fornece o mínimo absoluto da função

$$J : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad J[v] = \int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 \mathrm{d}x,$$

onde

$$\mathcal{M} = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) : v = g \text{ em } \partial\Omega\}.$$

2. Seja Ω um aberto com fronteira de classe C^∞ e considere as sequências $\{\lambda_k\}$ e $\{v_k\}$, respectivamente dos autovalores e das correspondentes autofunções do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet em Ω. Aqui $\{v_k\}$ é assumida normalizada em $L^2(\Omega)$, formando uma base hilbertiana para $C^\infty(\Omega)$. Seja $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u = 0$ em $\partial\Omega$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u(x)\, v_k(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq C/\lambda_k^{1/2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

3. Discuta o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \text{ em }]0,\pi[\times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \end{cases}$$

explicitando a regularidade do dado inicial e da solução obtida.

4. Seja $u(x,t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + u$$

em $]0,a[\times]0,T[\subset \mathbb{R}^2$, contínua em $[0,a]\times[0,T]$. Mostre que

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^T \max_\gamma |u|,$$

onde $\gamma \doteq (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{a\} \times [0,T]) \cup ([0,a] \times \{0\})$.

5. Dados $x \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, considere a função

$$w \mapsto \exp\{x(w - 1/w)/2\}.$$

em torno da origem. Na expansão

$$\exp\{x(w - 1/w)/2\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) w^n \tag{1}$$

o coeficiente $J_n(x)$ denomina-se *função de Bessel de ordem* n. Diferenciando (1) com relação a x e a w mostra-se facilmente que $J_n(x)$ é solução da seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem, chamada *equação de Bessel*:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0\,. \tag{2}$$

Substituindo $y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$ em (2) obtem-se:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{n+2p}}{2^{n+2p} p!(n+p)!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Valem, então, as seguintes propriedades:

(i) A série (3) converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, uniformemente sobre os compactos de $\mathbb{R}$ (isto segue do fato que seu raio de convergência é infinito).

(ii) Toda solução de (2) que é limitada em uma vizinhança de $x = 0$ é um múltiplo de J_n;

(iii) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

(iv) Cada $J_n(x)$ the um número infinito de zeros, todos simples (com a única possível exceção de $x = 0$). Se $n \geq 0$ os zeros > 0 de $J_n(x)$ são usualmente denotados por $j_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Existem tabelas que expressam estes valores. Por exemplo, os cinco primeiros zeros positivos de cada uma das funções J_n, $n = 0, \ldots, 5$ são dados, em valores aproximados, por

	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
$j_{n,1}$	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77
$j_{n,2}$	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06	12.34
$j_{n,3}$	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37	15.70
$j_{n,4}$	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62	18.98
$j_{n,5}$	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83	22.23

Com base nestas informações, resolva os ítens descritos a seguir:

(a) Calcule os autovalores (e as autofunções correspondentes) para o operador de Laplace no disco

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Sugestão. Utilize coordenadas polares e o método de separação de variáveis.

(b) Conclua a validade das seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_0^1 x J_n\left(j_{n,m} x\right) J_n\left(j_{n,k} x\right) \mathrm{d}x = 0, \;\; n \geq 0, \;\; m, k \geq 1, \;\; m \neq k.$$