MAP05902 - 1o. Semestre de 2019
Funções analíticas reais

1 Notação e algumas desigualdades

Iniciamos lembrando que um multi-índice de dimensão $N \geq 1$ é um elemento de $\mathbb{Z}_+^N$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, então escrevemos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!.$$

Se $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ a notação $\beta \leq \alpha$ significa $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

Se $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ também escrevemos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N}$ e finalmente ∂^α denota a derivada parcial de ordem α:

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Da fórmula de Newton generalizada

$$(t_1 + \ldots + t_N)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} t^\alpha, \quad t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{R},$$

tomando $t_j = 1$ para todo j obtemos

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq N^{|\alpha|} \alpha!. \tag{1.1}$$

Temos também

$$e^{|\alpha|} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^j}{j!} > \frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{|\alpha|!},$$

e portanto

$$|\alpha|! \leq |\alpha|^{|\alpha|} \leq |\alpha|! e^{|\alpha|} \leq \alpha! (Ne)^{|\alpha|}. \tag{1.2}$$

Finalmente, lembramos o seguinte fato conhecido:

$$\# \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| = k \right\} = \begin{pmatrix} N + k - 1 \\ N - 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Exercício 1.1. Mostre que

$$\begin{pmatrix} N + k - 1 \\ N - 1 \end{pmatrix} \leq (k+1)^{N-1}. \tag{1.4}$$

2 A fórmula de Taylor

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Supomos que existe $x_0 \in \Omega$ satisfazendo a seguinte propriedade: dado x em Ω então $[x_0, x] \subset \Omega$. Aqui estamos denotando por $[x_0, x]$ o segmento unindo x_0 a x, isto é:

$$[x_0, x] = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in [0, 1]\}.$$

Seja também $f \in C^k(\Omega)$, onde $k \geq 1$. Então vale a fórmula de Taylor:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{(\partial^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + R_k(x, x_0), \quad x \in \Omega \tag{2.1}$$

onde

$$R_k(x, x_0) = k \int_0^1 (1 - t)^{k-1} \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\partial^\alpha f)(x_0 + t(x - x_0))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right\} \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Lembre que a demonstração de (2.1) segue da fórmula de Taylor em uma variável: *se* $\gamma(t)$ *é uma função de classe* C^k *em um aberto de* $\mathbb{R}$ *que contém o intervalo* $[0, 1]$ *então*

$$\gamma(1) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1 - t)^{k-1}}{(k - 1)!} \gamma^{(k)}(t) \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

Tomando $\gamma(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ e aplicando a regra da cadeia vê-se que (2.1) é consequência de (2.3).

3 Somabilidade

Dada uma família $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N}$ diremos que a série $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ é *absolutamente somável* se a sequência de números reais positivos $\left(\sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha|\right)_{m \in \mathbb{Z}_+}$ é limitada. Vamos escrever

$$\lambda \doteq \sup \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha| : m \in \mathbb{Z}_+ \right\}. \tag{3.1}$$

Se $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ é absolutamente somável então a série $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$, onde $S_j = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha$, é absolutamente convergente, uma vez que

$$\sum_{j=0}^{m} |S_j| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha| \leq \lambda, \ \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Se denotarmos por a o valor da série $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$, e notarmos também que $\sum_{j=0}^{m} S_j = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha$, faz sentido escrever, por definição,

$$a = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha = \lim_{m\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha.$$

Mostraremos agora que

$$\lambda = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} |a_\alpha| : F \subset \mathbb{Z}_+^N, \text{finito}\right\}. \tag{3.2}$$

Demonstração de (3.2): Dado $F \subset \mathbb{Z}_+^N$ finito existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F \subset \{\alpha : |\alpha| \leq m\}$. Logo λ é um limitante superior do conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{\alpha\in F} |a_\alpha| : F \subset \mathbb{Z}_+^N, \text{finito}\right\}$$

e consequentemente $\sup\mathcal{A} \leq \lambda$. Como também sabemos que

$$\left\{\sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| : m \in \mathbb{Z}_+\right\} \subset \mathcal{A}$$

temos $\lambda \leq \sup\mathcal{A}$. Assim $\lambda = \sup\mathcal{A}$, o que demonstra (3.2). $\square$

No que se segue adotaremos a seguinte definição

Definição 3.1. *Uma sequência crescente $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots$ de subconjuntos finitos e não-vazios de $\mathbb{Z}_+^N$ satisfaz a propriedade $(\star)$ se vale a seguinte propriedade:*

$$\text{Dado } F \subset \mathbb{Z}_+^N \text{ finito existe } m \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } F \subset G_m. \tag{3.3}$$

Observe que (3.3) é equivalente a $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n = \mathbb{Z}_+^N$.

Exercício 3.1. Mostre que se $\{G_n\}$ satisfaz a propriedade $(\star)$ e se $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ é somável então

$$\lambda = \sup\left\{\sum_{\alpha\in G_n} |a_\alpha| : n \in \mathbb{Z}_+\right\}.$$

Proposição 3.1. *Seja $\{G_n\}$ uma sequência satisfazendo a propriedade $(\star)$ e seja também $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ uma família absolutamente somável. Então*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in G_n} a_\alpha. \tag{3.4}$$

Demonstração. Seja $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha$ e tomemos $\epsilon > 0$. Existe $n_* \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha - a \right| \le \epsilon/2, \ n \ge n_*. \tag{3.5}$$

e

$$\lambda - \epsilon/2 < \sum_{|\alpha| \le n_*} |a_\alpha| \le \lambda. \tag{3.6}$$

Tome agora $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\{\alpha : |\alpha| \le n_*\} \subset G_{n_0}$. Então se $n \ge n_0$ temos

$$\lambda - \epsilon/2 < \sum_{|\alpha| \le n_*} |a_\alpha| \le \sum_{\alpha \in G_n} |a_\alpha| \le \lambda$$

e consequentemente

$$\sum_{\alpha \in G_n \setminus \{\alpha : |\alpha| \le n_*\}} |a_\alpha| < \epsilon/2.$$

Assim, se $n \ge n_0$ obtemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in G_n} a_\alpha - a \right| &\le \left| \sum_{\alpha \in G_n} a_\alpha - \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha \right| + \left| \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha - a \right| \\ &= \left| \sum_{\alpha \in G_n \setminus \{\alpha : |\alpha| \le n_*\}} a_\alpha \right| + \left| \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha - a \right| \\ &\le \sum_{\alpha \in G_n \setminus \{\alpha : |\alpha| \le n_*\}} |a_\alpha| + \left| \sum_{|\alpha| \le n_*} a_\alpha - a \right| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

Sejam agora X um conjunto não-vazio $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ uma família de funções indexada por $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Temos a seguinte versão do M-teste de Weierstrass adaptada ao nosso novo contexto:

Proposição 3.2. *Suponha que* $\sup_{x \in X} |f_\alpha(x)| \le b_\alpha$ *e que* $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} b_\alpha$ *seja absolutamente somável. Então* $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} f_\alpha(x)$ *é absolutamente e uniformente somável em* X.

Demonstração. Para $m \in \mathbb{Z}_+$ podemos escrever

$$\sum_{|\alpha| \le m} f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{m} S_j(x),$$

onde $S_j(x)$ satisfaz

$$|S_j(x)| = \left|\sum_{|\alpha|=j} f_\alpha(x)\right| \leq \sum_{|\alpha|=j} b_\alpha \doteq M_j, \quad x \in X.$$

Como $\sum_{j=0}^{\infty} M_j < \infty$ o M-teste usual de Weierstrass usual se aplica e concluímos que $\sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha(x)$ converge absolutamente e uniformemente em X. $\square$.

Exercício 3.2. Nas condições da Proposição 3.2 mostre que $\sum_{\alpha\in G_n} f_\alpha(x)$ converge uniformemente, onde $\{G_n\}$ é qualquer sequência satisfazendo a propriedade $(\star)$.

4 Séries de potências em $\mathbb{R}^N$

Uma série de potências em $\mathbb{R}^N$ centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$ é uma série da forma

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} a_\alpha (x - x_0)^\alpha, \tag{4.1}$$

onde $a_\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

No que se segue denotaremos, para $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $R > 0$,

$$\Delta_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_j - x_{0j}| < R,\ j = 1, \ldots, N\}.$$

Exercício 4.1. Mostre que se $K \subset \Delta_R(x_0)$ é compacto então existe $0 < r < R$ tal que $K \subset \overline{\Delta_r(x_0)}$

Exemplo 4.1. A série de potências $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} x^\alpha$ é absolutamente e uniformente somável somável em cada subconjunto compacto de $\Delta_1(0)$.

De fato pelo exercício 4.1 bastará mostra que a série é uniformente e absolutamente somável em cada conjunto da forma $\overline{\Delta_\rho(0)}$, com $\rho < 1$. Agora, se $x \in \overline{\Delta_\rho(0)}$ e se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ então $|x^\alpha| \leq \rho^{|\alpha|}$. Tomando

$$G_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : 0 \leq \alpha_j \leq n,\ j = 1, \ldots, n\}$$

vemos que $\{G_n\}$ satisfaz a propriedade $(\star)$. Além disto

$$\sum_{\alpha\in G_n} \rho^{|\alpha|} = \left\{\sum_{j=0}^{n} \rho^j\right\}^N \leq (1-\rho)^{-N}.$$

Pelo exercício 3.1 segue que $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} \rho^{|\alpha|}$ é absolutamente somável e nossa afirmação segue da Proposição 3.2. Note que podemos calcular explicitamente

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} x^\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in G_n} x^\alpha = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_j=0}^{n} x_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1-x_j}, \quad x \in \Delta_1(0). \qquad \square$$

O resultado central da seção é o seguinte:

Proposição 4.1. *Suponha que a série de potências (4.1) seja absolutamente somável para cada ponto $x \in \Delta_R(x_0)$. Então:*

1. *A série (4.1) é absolutamente e uniformente somável sobre os compactos de $\Delta_R(x_0)$;*
2. *Defina $u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha (x - x_0)^\alpha$. Então u é uma função infinitamente diferenciável em $\Delta_R(x_0)$ e suas derivadas podem ser calculadas como*

$$(\partial^\beta u)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!}\, a_\alpha\, (x - x_0)^{\alpha - \beta}, \tag{4.2}$$

onde as séries em (4.2) são também absolutamente e uniformente somáveis sobre os compactos de $\Delta_R(x_0)$. Note, em particular, que

$$a_\alpha = \frac{(\partial^\alpha u)(x_0)}{\alpha!}. \tag{4.3}$$

Demonstração. Pelo exercício 4.1 devemos mostrar que a série (4.1) é uniformemente somável em cada conjunto da forma $\overline{\Delta_r(x_0)}$ como $0 < r < R$. Seja $x_* = (x_{01}+r, \ldots, x_{0N}+r)$. Como $x_* \in \Delta_R(0)$ e como (4.1) é absolutamente somável em cada ponto de $\Delta_R(0)$ segue que (4.1) é absolutamente somável em x_*, isto é, $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha r^{|\alpha|}$ é absolutamente somável. Mas, para $x \in \overline{\Delta_r(x_0)}$ temos

$$|a_\alpha (x - x_0)^\alpha| = |a_\alpha| \prod_{j=1}^N |x_j - x_{0j}|^{\alpha_j} \leq |a_\alpha| r^{|\alpha|}.$$

Logo a afirmação em (1) segue da Proposição 3.2. Por outro lado, para se concluir 2) basta mostrar que cada uma das séries em (4.2) é também absolutamente e uniformemente somável sobre os compactos $\overline{\Delta_r(x_0)}$, $0 < r < R$, uma vez que esta propriedade implicará a validade da derivação termo a termo de qualquer ordem. Agora como

$$\frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \leq |\alpha|^{|\beta|}$$

o termo geral da série em (4.2) pode ser estimado, para $x \in \Delta_r(x_0)$,

$$\left| \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!}\, a_\alpha\, (x - x_0)^{\alpha - \beta} \right| \leq |a_\alpha| |\alpha|^{|\beta|} r^{|\alpha| - |\beta|}.$$

Tomemos agora $0 < \epsilon < R - r$. Então o ponto $x_\bullet = (x_{01} + r + \epsilon, \ldots, x_{0N} + r + \epsilon)$ pertence a $\Delta_R(x_0)$ e portanto, raciocinando como antes, $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha (r + \epsilon)^{|\alpha|}$ é também absolutamente somável. Assim

$$|a_\alpha| |\alpha|^{|\beta|} r^{|\alpha| - |\beta|} \leq r^{-|\beta|} \left\{ |a_\alpha| (r + \epsilon)^{|\alpha|} \right\} |\alpha|^{|\beta|} \left\{ \frac{r}{r + \epsilon} \right\}^{|\alpha|}.$$

Agora

$$B(r,\epsilon,\beta) \doteq \sup\left\{|\alpha|^{|\beta|}\left\{\frac{r}{r+\epsilon}\right\}^{|\alpha|} : \alpha \in \mathbb{Z}_+^N\right\}$$

está bem definido e é finito. Assim obtemos, finalmente,

$$\left|\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\, a_\alpha\, (x-x_0)^{\alpha-\beta}\right| \leq B(r,\epsilon,\beta) r^{-|\beta|}\left\{|a_\alpha|(r+\epsilon)^{|\alpha|}\right\}$$

e nossa afirmação segue novamente da Proposição 3.2. $\square$

Para nosso próximo resultado precisamos determinar explicitamente uma estimativa para as constantes $B(r,\epsilon,\beta)$, $\beta \neq 0$. Temos

$$B(r,\epsilon,\beta) \leq \sup_{\tau\geq 0} \tau^{|\beta|} e^{-b\tau},$$

onde $b = \log\{(r+\epsilon)/r\} > 0$. Note que a função $h(\tau) = \tau^{|\beta|}e^{-b\tau}$, definida para $\tau \geq 0$, é ≥ 0 e se anula para $\tau = 0$ e $\tau \to \infty$. Na região $\tau > 0$ a derivada de h tem um único zero igual a $\tau_* = |\beta|/b$. Assim concluimos que $h(\tau) \leq h(\tau_*) = |\beta|^{|\beta|}(be)^{-|\beta|} \leq |\beta|^{|\beta|}$ e, portanto,

$$B(r,\epsilon,\beta) \leq |\beta|^{|\beta|} \leq e^{|\beta|}|\beta|!,$$

onde na última desigualdade utilizamos (1.2). Deste modo obtemos, para $x \in \Delta_r(x_0)$,

$$|(\partial^\beta u)(x)| \leq \frac{e^{|\beta|}|\beta|!}{r^{|\beta|}} \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} |a_\alpha|(r+\epsilon)^{|\alpha|}}_{<\infty}.$$

Demonstramos o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Seja $u(x)$ a função de classe C^∞ definida no enunciado da Proposição 4.1. Então para todo conjunto compacto $K \subset \Delta_R(x_0)$ existem constantes $C > 0$, $M > 0$ tais que*

$$\sup_{x\in K} |(\partial^\beta u)(x)| \leq CM^{|\beta|}|\beta|!, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^N.$$

5 Funções analíticas reais

Definição 5.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f \in C^\infty(\Omega)$. Dizemos que f é analítica real em Ω se para todo compacto K contido em Ω existem constantes $C > 0$, $M > 0$ tais que*

$$\sup_{x\in K} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq CM^{|\alpha|}|\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{5.1}$$

Denotaremos por $C^\omega(\Omega)$ o espaço das funções analíticas reais em Ω. É fácil ver que $C^\omega(\Omega)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Note também que se u é a função definida no enunciado da

Proposição 4.1 então a Proposição 4.2 mostra que $u \in C^\omega(\Delta_R(x_0))$. A próxima proposição diz que analiticidade real é uma propriedade local.

Proposição 5.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f \in C^\infty(\Omega)$. Suponha que dado $x_* \in \Omega$ arbitrário exista $R_* > 0$ tal que $f|_{\Delta_{R_*}(x_*)} \in C^\omega(\Delta_{R_*}(x_*))$. Então $f \in C^\omega(\Omega)$.*

Demonstração. Para cada $x_* \in \Omega$ tomamos $0 < r_* < R_*$. Logo existirão constantes $C_{x_*} > 0$, $M_{x_*} > 0$ tais que

$$\sup_{x \in \Delta_{r_*}(x_*)} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq C_{x_*} M_{x_*}^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{5.2}$$

Tomemos agora $K \subset \Omega$ compacto. Como

$$K \subset \bigcup_{x_* \in K} \Delta_{r_*}(x_*)$$

concluímos então que existem $x_1, \dots, x_p \in K$ e constantes $r_j > 0$, $C_j > 0$, $M_j > 0$, $j = 1, \dots, p$, satisfazendo $\Delta_{r_j}(x_j) \subset \Omega$, $j = 1, \dots, p$,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Delta_{r_j}(x_j) \tag{5.3}$$

e

$$\sup_{x \in \Delta_{r_j}(x_j)} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq C_j M_j^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N,\ j = 1, \dots, p. \tag{5.4}$$

Tomando $C = \max\{C_1, \dots, C_p\}$ e $M = \max\{M_1, \dots, M_p\}$ vemos facilmente que (5.1) segue de (5.3) e (5.4). $\square$

Estamos agora prontos para demonstrar nosso resultado principal:

Teorema 5.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f \in C^\infty(\Omega)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$f \in C^\omega(\Omega)$.*
2. *Dado $x_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $\Delta_r(x_0) \subset \Omega$ e a série de Taylor de f definida por $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} (\partial^\alpha f)(x_0)(x - x_0)^\alpha / \alpha!$ é absolutamente somável em cada ponto de $\Delta_r(x_0)$ e*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} \frac{(\partial^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha = f(x), \quad x \in \Delta_r(x_0). \tag{5.5}$$

Demonstração. As proposições 4.1, 4.2 e 5.1 mostram que 2) $\Rightarrow$ 1).

Para mostrar que 1) $\Rightarrow$ 2) fixamos $x_0 \in \Omega$ e fixamos também $R > 0$ tal que $\overline{\Delta_R(x_0)} \subset \Omega$. Como este é um subconjunto compacto de Ω, por 1) existem constantes $C > 0$, $M > 0$ tais que

$$\sup_{x \in \overline{\Delta_R(x_0)}} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq C M^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{5.6}$$

Vamos mostrar que se $0 < r < R$ é escolhido suficientemente pequeno então a série de Taylor de f é absolutamente somável em cada ponto de $\Delta_r(x_0)$ e que vale (5.5). Como (5.6) implica em particular que

$$|(\partial^\alpha f)(x_0)| \leq C M^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N$$

temos, para $x \in \Delta_r(x_0)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{(\partial^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (Mr)^{|\alpha|} \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} (NMr)^{|\alpha|},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos (1.1). Agora, por (1.3) e (1.4),

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{(\partial^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} (NMr)^{|\alpha|} \\
&= C \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha| = j} (NMr)^{|\alpha|} \\
&\leq C \sum_{j=0}^{m} (NMr)^j (j+1)^{N-1} \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} (NMr)^j (j+1)^{N-1} < \infty,
\end{aligned}$$

o que mostra nossa afirmação se escolhermos r de tal forma que $0 < r < 1/(NM)$.

Para concluir a demonstração devemos verificar (5.5). Para tal utilizaremos a fórmula de Taylor (2.1). Para $x \in \Delta_r(x_0)$ e $m \in \mathbb{N}$ podemos escrever

$$f(x) - \sum_{|\alpha| < m} \frac{(\partial^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha = R_m(x, x_0)$$

e portanto bastará mostrar que $R_m(x, x_0) \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente para $x \in \Delta_r(x_0)$. De (2.2) e de (5.6) temos

$$\begin{aligned}
|R_m(x, x_0)| &\leq m \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \frac{|(\partial^\alpha f)(x_0 + t(x - x_0))|}{\alpha!} \, |(x - x_0)^\alpha| \right\} \mathrm{d}t \\
&\leq m \, C \sum_{|\alpha| = m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (Mr)^{|\alpha|} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{m-1} \mathrm{d}t}_{=1/m}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C \sum_{|\alpha|=m} (NMr)^{|\alpha|} \\
&= C(NMr)^m \left(\begin{array}{c} N+m-1 \\ N-1 \end{array} \right) \le C(NMr)^m (m+1)^{N-1}
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \Delta_r(x_0)$ e todo $m \in \mathbb{N}$ (aqui utilizamos novamente (1.1) e (1.3)). Como $r < 1/(NM)$ temos

$$
C(NMr)^m (m+1)^{N-1} \longrightarrow 0, \quad m \to \infty,
$$

e isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 5.1. *Seja $f(x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha x^\alpha$ uma função polinomial em $\mathbb{R}^N$, com $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Então $f \in C^\omega(\mathbb{R}^N)$.*

Exercício 5.1. Na definição da classe $C^\omega(\Omega)$ mostre que podemos substituir, em (5.1), $|\alpha|!$ por $\alpha!$ ou por $|\alpha|^{|\alpha|}$.

Exercício 5.2. A fórmula de Leibniz em várias variáveis se escreve do seguinte modo: se $k \in \mathbb{N}$ e se $f, g \in C^k(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, então para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ com $|\alpha| \le k$ e $x \in \Omega$ tem-se

$$
(\partial^\alpha (fg))(x) = \sum_{\beta \le \alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) (\partial^\beta f)(x) (\partial^{\alpha - \beta} g)(x).
$$

Utilizando esta fórmula mostre que $f, g \in C^\omega(\Omega) \Longrightarrow fg \in C^\omega(\Omega)$.

Exercício 5.3. Considere, para $x \in \mathbb{R}$,

$$
f(x) = \int_0^\infty \cos(xs^2)\, e^{-s}\, \mathrm{d}s.
$$

Mostre que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mas que f não é analítica real em vizinhança alguma da origem. *Sugestão:* calcule $f^{(2k)}(0)$, para $k = 0, 1, \ldots$ e mostre, por indução, que

$$
\int_0^\infty s^j\, e^{-s}\, \mathrm{d}s = j!.
$$

- - - - - o o o - - - - -