MAP 2320 - 2o. Semestre de 2019

Lista extra de exercícios

1. Seja $f \in \mathcal{L}$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e suponha $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Mostre que dada $u \in C(\mathbb{R})$ limitada vale

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)u(x - \varepsilon y)\,\mathrm{d}y = u(x).$$

Mostre também que vale

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|/\varepsilon} u(y)\mathrm{d}y = u(x).$$

2. Seja $u(x,t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + \lambda u$$

em $]0,a[\times]0,T[\subset \mathbb{R}^2$, contínua em $[0,a] \times [0,T]$. Aqui $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^{|\lambda|T} \max_{\gamma} |u|,$$

onde $\gamma \doteq (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{a\} \times [0,T]) \cup ([0,a] \times \{0\})$.

3. Resolva o problema de Dirichlet para $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$:

- $u(x,y)$ harmônica e limitada em Ω;
- $u(x,0) = u_0(x),\ \ u(0,y) = 0,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$.

Aqui $u_0 \in C([0,\infty[)$ é limitada e satisfaz $u_0(0) = 0$.

4. Seja u uma função de classe C^2 em $[0,a] \times [0,\infty[$ $(a > 0)$ satisfazendo o problema

$$(\star) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & \text{em }]0,a[\times]0,\infty[; \\ u(x,0) = u_0(x); \\ u(0,t) = u(a,t) = 0 & \text{para } t \geq 0. \end{cases}$$

Mostre que

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^a u_x(x,t)^2 \mathrm{d}x, \quad t \geq 0,$$

é uma função decrescente. É possível concluir, a partir deste resultado, a unicidade do problema $(\star)$?