## MAP 2320 - 2o. Semestre de 2019

## 6a. lista de exercícios

**1.** Uma *família de Dirac* é uma família $\{f_\varepsilon\} \subset \mathcal{L}$ parametrizada em $\varepsilon > 0$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $f_\varepsilon(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
3. Para todo $\eta > 0$ vale que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\eta} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 0$.

Mostre que se $u \in C(\mathbb{R})$ é limitada então para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \longrightarrow u(x) \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

**2.** Seja $f \in \mathcal{L}$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Mostre que

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

define uma sequência de Dirac.

**3.** Considere as funções:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

O que se pode concluir a partir dos exercícios anteriores e do material apresentado em classe?

**4.** Resolva o problema de Dirichlet para $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$:

- $u(x, y)$ harmônica e limitada em $\Omega$;
- $u(x, 0) = u_0(x),\ \ u(0, y) = 0,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0.$

Aqui $u_0 \in C([0, \infty[)$ é limitada e satisfaz $u_0(0) = 0$