MAP 2320 - 2o. Semestre de 2019

5a. lista de exercícios

1. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mostre que $\widehat{(f \star g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Demonstre a *fórmula de Parseval:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

3. Resolva o problema do calor para a barra semi-infinita

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \geq 0; \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Aqui u_0 é contínua e limitada em $[0, \infty[$ e satisfaz $u_0(0) = 0$.
Sugestão: considere a extensão ímpar de u_0.

4. Seja $u(x,t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + u$$

em $]0, a[\times]0, T[\subset \mathbb{R}^2$, contínua em $[0, a] \times [0, T]$. Mostre que

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^T \max_{\gamma} |u|,$$

onde $\gamma \doteq (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{a\} \times [0, T]) \cup ([0, a] \times \{0\})$.
Sugestão: considere $v(x,t) = e^{-t}u(x,t)$.

5. Verifique que a solução limitada do problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}\times]0, \infty[; \\ u(x,0) = u_0(x), & u_0 \in C(\mathbb{R}) \text{ e limitada}, \end{cases}$$

é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x - 2\sqrt{t}y)\, e^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y.$$