MAP 2320 - 2o. Semestre de 2019

4a. lista de exercícios

Observação. Nos enunciados abaixo usamos a notação u_x, etc. para designar a derivada parcial com relação a x, etc.

1. Seja u uma função de classe C^2 em $[0,a]\times[0,\infty[$ $(a>0)$ satisfazendo o problema

$$(\star)\qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{em }]0,a[\times]0,\infty[; \\ u(x,0) = u_0(x); \\ u(0,t) = u(a,t) & \text{para } t\geq 0. \end{cases}$$

Mostre que

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^a u_x(x,t)^2 \mathrm{d}x, \quad t\geq 0,$$

é uma função decrescente e conclua, daí, a unicidade do problema $(\star)$.

2.. Sejam $f\in C^2(\mathbb{R})$ e $g\in C^1(\mathbb{R})$, ambas se anulando no complementar de um intervalo $[-M,M]$, e seja também $u(x,t)$ a solução do problema

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R};\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Mostre que para cada $t\geq 0$ a função

$$x \mapsto u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2$$

se anula no complementar de um intervalo de $\mathbb{R}$. Considere a função energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2\right]\mathrm{d}x.$$

Mostre que $t\mapsto E(t)$ é constante,

3. Seja $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x,t\in\mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R}; \\ u_t(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

Dado $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ com $t>0$ seja K o compacto de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é definido pelo triângulo com vértices $A=(x,t)$, $B=(x+t,0)$, $C=(x-t,0)$.

Suponha que $g \leq 0$ em $\overline{BC}$. Mostre que o máximo de u em K é assumido em $\overline{BC}$.

4. Discuta o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ em }]0, \pi[\times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \ x \in [0, \pi] \\ u_t(x,0) = g(x), \ x \in [0, \pi] \\ u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases},$$

explicitando a regularidade das condições iniciais e a regularidade da solução obtida.