Convolução em $\mathcal{S}'$

No que segue utilizaremos a seguinte notação: se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ definiremos $\check{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ pela fórmula

$$\check{u}(\phi) := u(\check{\phi}), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

É fácil ver que $\check{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Teorema. *Se $u \in \mathcal{S}'$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então $u \star v \in \mathcal{S}'$ e vale:*

$$\widehat{u \star v} = \hat{v}\hat{u}. \tag{1}$$

Note que em (1) o produto está bem definido uma vez que, como visto em aula, $\hat{v} \in \mathcal{O}_M$.

Demonstração: Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ então, como já visto anteriormente,

$$(u \star v)(\phi) = [(u \star v) \star \check{\phi}](0). \tag{2}$$

Mostraremos agora que

$$[(u \star v) \star \check{\phi}](0) = u(\check{v} \star \phi). \tag{3}$$

De fato temos $[(u \star v) \star \check{\phi}](x) = [u \star (v \star \check{\phi})](x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ e

$$[u \star (v \star \check{\phi})](x) = u_y \left[(v \star \check{\phi})(x-y)\right] = u_y \left\{v_z[\check{\phi}(x-y-z)]\right\}$$

Assim

$$[(u \star v) \star \check{\phi}](0) = u_y \left\{v_z[\check{\phi}(-y-z)]\right\}$$

Para $y \in \mathbb{R}^N$ fixado escreva $\eta := \check{\phi}(-y + \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$v_z[\check{\phi}(-y-z)] = v(\check{\eta}) = \check{v}(\eta) = \check{v}_z[\check{\phi}(-y+z)] = \check{v}_z[\phi(y-z)] = (\check{v} \star \phi)(y)$$

e portanto

$$[(u \star v) \star \phi](0) = u_y[(\check{v} \star \phi)(y)]$$

o que demonstra (3). Inserindo (3) em (2) obtemos

$$(u \star v)(\phi) = u(\check{v} \star \phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4}$$

Agora o lado direito de (4) se estende a um funcional contínuo em $\mathcal{S}$ pois, para algum compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $C > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta (\check{v} \star \phi)(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \check{v}_y [D_x^\beta \phi(x-y)]|$$

$$\leq C \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \sup_{y \in K} |x^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma \phi(x-y)| \leq C \sum_{|\gamma| \leq k + |\beta|} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\gamma \phi(x)|$$

Logo $u \star v \in \mathcal{S}'$ e

$$(u \star v)(\hat{\phi}) = u(\check{v} \star \hat{\phi}), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado

$$(\check{v} \star \hat{\phi})(x) = v[(\hat{\phi}(x + \cdot)] = v_y \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x+y,\xi\rangle} \phi(\xi) \mathrm{d}\xi \right] =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} v_y \left(e^{-i\langle y,\xi\rangle} \right) \phi(\xi) \mathrm{d}\xi = \mathcal{F}(\phi\hat{v})(x)$$

e, portanto,

$$\widehat{(u \star v)}(\phi) = u \left[\mathcal{F}(\phi\hat{v}) \right] = \hat{u}(\phi\hat{v}) = (\hat{v}\hat{u})(\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

A demonstração esta completa. $\square$