O teorema de aproximação de Malgrange

No que segue denotaremos por $P(D)$ um ODPL com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^N$ de ordem $m \geq 1$ cujo símbolo se escreve na forma

$$P(\zeta) = a\zeta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} p_j(\zeta')\zeta_1^j. \tag{0}$$

onde $\zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_N)$, p_j são polinômios de grau $\leq m - j$ e $a \neq 0$. Esta hipótese não é restritiva, pois dado $P(D)$ arbitrário de ordem m podemos tomar $\zeta_0 \in \mathbb{C}^N$ de norma 1 tal que $P_m(\zeta_0) \neq 0$. Compondo com uma transformação unitária que leva ζ_0 em $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ obteremos um operador na forma (0) e todos os resultados abaixo são invariantes por transformações unitárias.

Teorema 1. *Se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então a equação*

$$P(D)u = f \tag{1}$$

possui uma solução $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $\hat{f}(\zeta)/P(\zeta)$ define uma função inteira em $\mathbb{C}^N$. Além disto, se f tem suporte contido na bola $\{x : |x| \leq A\}$ o mesmo será verdade para u.

Demonstração: Se (1) admite uma solução $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ então tomando a transformada de Fourier em (1) nos fornece $P(\zeta)\hat{u}(\zeta) = \hat{f}(\zeta)$ e portanto $\hat{f}(\zeta)/P(\zeta)$ $(=\hat{u}(\zeta))$ define uma função inteira em $\mathbb{C}^N$. Para a recíproca provaremos antes um lema:

Lema. *Seja h uma função inteira em $\mathbb{C}$ e $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ um polinômio em z de grau m. Então*

$$|a_m h(0)| \leq \max_{|z|=1} |p(z)h(z)| .$$

Demonstração do lema. Seja $q(z) = z^m \sum_{j=0}^m \overline{a_j} z^{-j}$. Então $q(z)$ é também um polinômio em z de grau $\leq m$ e $q(0) = \overline{a_m}$. Pelo princípio do máximo

$$|a_m h(0)| = |\overline{a_m} h(0)| = |q(0)h(0)| \leq \max_{|z|=1} |q(z)p(z)| .$$

Para concluir a demonstração do lema basta observar que $|p(z)| = |q(z)|$ se $|z| = 1$. De fato, uma vez que $|z| = 1$ temos

$$|q(z)| = |z^m| \left| \sum_{j=0}^m \bar{a}_j z^{-j} \right| = \left| \overline{\sum_{j=0}^m \bar{a}_j z^{-j}} \right| = \left| \sum_{j=0}^m a_j z^j \right| = |p(z)|. \qquad \square$$

Final da demonstração do teorema 1. Suponha que $H(\zeta) := \hat{f}(\zeta)/P(\zeta)$ seja uma função inteira em $\mathbb{C}^N$. Pelo lema aplicado para $p(z) = P(ze_1 + \zeta)$, $h(z) = H(ze_1 + \zeta)$ (ζ fixado) temos

$$|aH(\zeta)| \leq \max_{|z|=1} |P(ze_1 + \zeta)H(ze_1 + \zeta)| = \max_{|z|=1} |\hat{f}(ze_1 + \zeta)|.$$

uma vez que $p(z) = az^m + \cdots$. Agora, como $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ tem suporte em $\{x : |x| \leq A\}$ existem constantes $C > 0$, $M \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^M \exp\{A|\mathsf{Im}\,\zeta|\},\ \zeta \in \mathbb{C}^N.$$

Consequentemente

$$|aH(\zeta)| \leq C \max_{|z|=1} \left\{(1 + |ze_1 + \zeta|)^M \exp\{A\,|\mathsf{Im}(ze_1 + \zeta)|\right\}$$

$$\leq C2^m e^A C(1 + |\zeta|)^M \exp\{A|\mathsf{Im}\,\zeta|\},\ \zeta \in \mathbb{C}^N,$$

e portanto H é a transformada de Fourier de um elemento $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ com suporte contido na bola $\{x : |x| \leq A\}$ (teorema de Paley-Wiener-Schwartz). Como também $P(\zeta)\hat{u}(\zeta) = P(\zeta)H(\zeta) = \hat{f}(\zeta)$ obtemos $P(D)u = f$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Definição *Uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ da equação $P(D)u = 0$ é chamada solução exponencial se pode ser escrita na forma*

$$u(x) = p(x) \exp\{\langle x, \zeta\rangle\}$$

onde $\zeta \in \mathbb{C}^N$ e $p(x)$ é um polinômio.

Vamos provar agora o Teorema de Aproximação de Malgrange. Observamos que o teorema é válido para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto convexo. Provaremos somente no caso em que Ω é uma bola, uma vez que o caso geral requer uma versão um pouco mais precisa do Teorema de Paley-Wiener-Schwartz do que aquela provada no curso.

Teorema 2. *Seja $r > 0$ e defina $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$. Então toda solução $u \in C^\infty(\Omega)$ da equação $P(D)u = 0$ é limite, em $C^\infty(\Omega)$, de uma sequência de combinações lineares de soluções exponenciais.*

Note que quando $N = 1$ a teoria das EDO's lineares nos diz que toda solução u é de fato uma combinação linear de soluções exponenciais.

Demonstração. Seja $E = \{u \in C^\infty(\Omega) : P(D)u = 0\}$. Então E é um espaço de Fréchet (subespaço fechado de $C^\infty(\Omega)$) e todo elemento em seu dual é da forma $\nu|_E$, onde $\nu \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pelo teorema de Hahn-Banach temos que mostrar que $\nu = 0$ em E se ν se anula em toda solução exponencial. Vamos a seguir mostrar que esta última afirmação implica a seguinte propriedade:

$$\hat{\nu}(\zeta)/P(-\zeta) \text{ define uma função inteira em } \mathbb{C}^N. \tag{2}$$

Notemos que (2) implica a afirmação do teorema. De fato de (2) e do teorema 1 segue que existe $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tal que $P(-D)\mu = \nu$. Logo se $u \in E$ temos

$$\nu(u) = (P(-D)\mu)(u) = \mu(P(D)u) = 0.$$

Para concluirmos a demonstração teorema 2 temos então que mostrar vale (2) se ν se anula em toda solução exponencial.

Note primeiramente que $z \mapsto P(-ze_1 - \zeta)$ é um polinômio não constante, qualquer que seja o valor de ζ. Vamos primeiramente verificar que, qualquer que seja $\zeta \in \mathbb{C}^N$,

$$z \mapsto \hat{\nu}(ze_1 + \zeta)/P(-ze_1 - \zeta) \tag{3}$$

define uma função inteira em $\mathbb{C}$. De fato suponha que o denominador em (3) tenha um zero de ordem k em z_0. Se aplicarmos o operador $\mathrm{d}^j/\mathrm{d}z^j$ $(j < k)$ na identidade

$$P(D)\left\{\exp\{-i\langle x, ze_1 + \zeta\rangle\}\right\} = P(-ze_1 - \zeta)\exp\{-i\langle x, ze_1 + \zeta\rangle\}$$

e depois fizermos $z = z_0$ obteremos

$$P(D)\left\{x^j \exp\{-i\langle x, z_0e_1 + \zeta\rangle\}\right\} = 0, \quad j < k.$$

Consequentemente $x \mapsto x^j \exp\{-i\langle x, z_0e_1 + \zeta\rangle\}$ é uma solução exponencial se $j < k$ e portanto

$$\nu\left(x^j \exp\{-i\langle x, z_0e_1 + \zeta\rangle\}\right) = 0, \quad j < k.$$

Isto é o mesmo que dizer que

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j}\left\{\hat{\nu}(ze_1 + \zeta)\right\}|_{z=z_0} = 0, \quad j < k,$$

o que mostra que o numerador em (3) deve ter um zero de ordem pelo menos k em z_0. Logo (3) define uma função inteira em $\mathbb{C}$.

Fixemos agora $\zeta_0 \in \mathbb{C}^N$ e tomemos $r > 0$ tal que

$$|z| = r \implies P(-ze_1 - \zeta_0) \neq 0.$$

A continuidade da função

$$\zeta \mapsto \max_{|z|=r} |P(-ze_1 - \zeta)|$$

mostra então que existe V_0, vizinhança aberta de ζ_0 em $\mathbb{C}^N$ tal ue

$$|z| = r \implies P(-ze_1 - \zeta) \neq 0, \ \zeta \in V_0.$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a função (3) centrada em $z = 0$ e para $\zeta \in V_0$ obtemos

$$\frac{\hat{\nu}(\zeta)}{P(-\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{\hat{\nu}(ze_1 + \zeta)}{P(-ze_1 - \zeta)}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Logo $\hat{\nu}(\zeta)/P(-\zeta)$ é holomorfa em V_0. Como ζ_0 é arbitrário o teorema 2 fica completamente demonstrado. $\square$