MAP5722 - 1o. semestre de 2019

1a. lista de exercícios

A. Siga os passos abaixo para mostrar o seguinte resultado devido a L. Schwartz: Não é possível definir sobre $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ um produto (forma bilinear)

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (u, v) \mapsto u \bullet v$$

que:

1. Seja associativo (não necessariamente comutativo);
2. Tem a função constante igual a um como elemento neutro;
3. Satisfaz $x \bullet \delta = 0$;
4. Coincide com o produto ponto a ponto usual sobre $C(\mathbb{R})$;
5. Satisfaz a regra de Leibniz para diferenciação.

Passo 1: mostre que se existir um produto como o descrito acima então, necessariamente,

$$x \bullet \mathrm{VP}\left[\frac{1}{x}\right] = \mathrm{VP}\left[\frac{1}{x}\right] \bullet x = 1.$$

De fato, seja $u(x) := x(\log|x| - 1) \in C(\mathbb{R})$. Calcule $\partial^2 u$ (no sentido de distribuições e compare com $\partial^2(x \bullet u) = \partial^2(u \bullet x)$. Mostre que $x \bullet u$ é de classe C^1 e que sua derivada (clássica) é igual a $2u + x$.

Passo 2: Complete a demonstração considerando

$$\mathrm{VP}\left[\frac{1}{x}\right] \bullet (x \bullet \delta) = \dots$$

B. Seja $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e considere $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{1/j}^{(j)}.$$

Mostre que não existe uma distribuição definida em algum intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ que coincida com u em $]0, \varepsilon[$.

C. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ definida por $f(x) = \exp\{1/|x|\}$. Mostre que não existe uma distribuição definida em um aberto U de $\mathbb{R}^N$ contendo a origem e coincidindo com u em $U \setminus \{0\}$.

D. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ definida por $f(x) = x^{-m}$. Determine $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $u = f$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

E. Determine $\lim_{t\to\infty} f_t$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, onde

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}.$$

F. Determine todas as distribuições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tais que $x_N^k u = 0$.

G. Seja $\varphi \in C_c^\infty(]-1,1[)$ satisfazendo:

$$\varphi \geq 0, \quad \int \varphi = 1, \quad \varphi(x) = 1 \text{ se } x \in [-1/2, 1/2].$$

Verifique que $0 \notin \operatorname{supp}(\delta' \star \varphi)$ e compare com o exercício 4.3.1 do livro de Hörmnder.

H. Dada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$ defina $\tau_h(f) := f(\cdot + h)$. Mostre que esta definição se estende naturalmente a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ através da regra

$$\tau_h(u)(\varphi) := u(\tau_{-h}(\varphi)), \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mostre também que:

1. se e_j denota o $j-$ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$ então

$$\lim_{t\to 0} \big(\tau_{te_j}(u) - u\big)/t = \partial_j u \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N);$$

2. $\tau_h(u) = \tau_{-h}(\delta) \star u$.