MAT 0554 - Panorama de Matemática / 2o. semestre de 2018

Lista de exercícios

A. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que dado $\varepsilon > 0$ existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ números reais e $m_1, \cdots, m_n$ inteiros não negativos tais que

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{m_j x}| \leq \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

B. Seja K um subconjunto compacto (não vazio) de $\mathbb{R}^N$. Se $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e se $(k_1, \ldots, k_N)$ denota uma sequência de inteiros não negativos considere a função

$$x \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_N^{k_N}.$$

Mostre que as combinações lineares dessas funções formam um conjunto denso em $C(K)$.

C. Nos exercícios abaixo K denota um espaço compacto Hausdorff.

1. Seja $\mathcal{A}$ uma subalgebra fechada de $C(K)$ que separa pontos. Mostre que $\mathcal{A}$ é um ideal. *Sugestão:* Considere $\mathcal{B} := \{c + f : c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{A}\}$ e mostre que $\overline{\mathcal{B}} = C(K)$.

2. Seja $\mathcal{A}$ uma subalgebra de $C(K)$ que separa pontos. Suponha que exista $f \in \overline{\mathcal{A}}$ com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in K$. Mostre então que $\mathcal{A}$ contém as constantes.

3. Conclua que, no enunciado do Teorema de Stone-Weierstrass, podemos substituir a hipótese "$\mathcal{A}$ contém a função constante igual a 1" por:

$$\text{para todo } x \in K \text{ existe } f \in \mathcal{A} \text{ com } f(x) \neq 0.$$

4. Mostre então que se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra fechada de $C(K)$ que separa pontos então ou $\mathcal{A} = C(K)$ ou $\mathcal{A}$ é um ideal maximal de $C(K)$, isto é, $\mathcal{A} = \{f \in C(K) :\ f(x) = 0\}$ para algum $x \in K$.

D. Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff. Dizemos que $f \in C(X)$ *se anula no infinito* se vale a seguinte propriedade: dado $\varepsilon > 0$ existe $Y \subset X$ compacto tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ se $x \in X \setminus Y$. Denote por $C_0(X)$ o conjunto das $f \in C(X)$ que se anulam no infinito. Seja também

$$B(X) := \{f \in C(X) : f \text{ é limitada em } X\}.$$

1. Mostre que $B(X)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$f \mapsto \sup_X |f|.$$

2. Mostre que $C_0(X)$ é fechado em $B(X)$.

3. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra fechada $C_0(X)$ que separa pontos então ou $\mathcal{A} = C_0(K)$ ou $\mathcal{A} = \{f \in C_0(K) : f(x) = 0\}$ para algum $x \in K$.

E. Sejam K um espaço compacto Hausdorff e $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{C}$-subálgebra fechada de $C(K;\mathbb{C})$ que separa pontos, contém a função constante igual a 1 e satisfaz também a seguinte propriedade:

$$f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}.$$

Mostre que $\mathcal{A} = C(K;\mathbb{C})$.