MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

Lista extra de exercícios

1. Lançando mão de resultados conhecidos da análise real demonstre, com todos os detalhes, a seguinte afirmação:

- Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $\{f_n\}$ uma sequência em $C^k(\Omega)$, onde $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Suponha que para todo $K \subset \Omega$ compacto e todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, com $|\alpha| \leq k$, existe uma sequência $\{M_n\}$ de números reais positivos, sequência esta dependente de K e de α, tal que

$$\sup_K |D^\alpha f_n| \leq M_n,\ \forall n \in \mathbb{N}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

  Mostre que a série $f(x) = \sum_n f_n(x)$ define uma função em $C^k(\Omega)$ e que, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ com $|\alpha| \leq k$, tem-se $D^\alpha f = \sum_n D^\alpha f_n$.

2. Mostre que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n^2 x) e^{-nx+5x}$$

define uma função infinitamente diferenciável em $]5, \infty[$.

3. Mostre que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2|x|}$$

define uma função infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

4. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ em $\mathbb{R}$ ($a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$). Suponha que a série seja convergente no ponto $x_* \in \mathbb{R}$. Mostre então que a série define uma função infinitamente diferenciável no intervalo $-|x_*| < x < |x_*|$.

5. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

converge uniformemente em qualquer intervalo limitado, mas não converge absolutamente para qualquer valor de x.