MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

9a. lista de exercícios

1. Seja

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^N} \exp\{-|x|^2/4t\}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Mostre que se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ então

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) K(x-y,t)\, \mathrm{d}y$$

é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$.

Sugestão: Fixados $0 < a < b$ e $R > 0$ verifique que dados $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $k \in \mathbb{Z}_+$ existem constantes $C > 0$, $c > 0$, $\rho > 0$ (que dependem de a, b, R, α e k) tais que

$$|D_x^\alpha D_t^k K(x-y,t)| \leq C \exp\{-c|y|^2\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x| \leq R,\ |y| \geq \rho,\ t \in [a,b],$$

e mostre que a conclusão do exercício segue desta propriedade.

2. Verifique que a solução limitada do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times]0,\infty[; \\ u(x,0) = u_0(x), & u_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x - 2\sqrt{t}y)\, e^{-|y|^2}\, \mathrm{d}y.$$

Mostre então que se existirem constantes $M, \delta > 0$ tais que

$$|u_0(x)| \leq M e^{-\delta|x|^2},\ x \in \mathbb{R}^N,$$

então

$$|u(x,t)| \leq M(1+4\delta t)^{-N/2} e^{-\delta|x|^2/(1+4\delta t)}.$$

Conclua que se u_0 tiver suporte compacto então

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \text{ uniformemente para } x \in \mathbb{R}^N.$$

3. Sejam

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{-x^2/4t\}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

e

$$v(x,t) = \frac{\partial K}{\partial x}(x,t).$$

Mostre que v satisfaz $v_t - v_{xx} = 0$ em $t > 0$ e também que $v(x,t) \to 0$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado. Mostre também que v não é limitada, calculando seus valores ao longo da parábola $x^2 = 4t$. Interprete este resultado tendo em vista o resultado de unicidade provado em aula.

4. Sejam $L > 0$ e $\Omega =]0, L[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$. Suponha que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaça

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ em } \Omega;$$

$$u_x(0,t) = 0, \ t \geq 0.$$

Para cada $T > 0$ defina

$$\Gamma = ([0,L] \times \{0\}) \cup (\{L\} \times [0,T]) \, .$$

Mostre que

$$\max_{[0,L]\times[0,T]} u = \max_{\Gamma} u \, .$$

5. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t - t\Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times]0, \infty[; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \, u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, \infty[)$.

6. Resolva o problema do calor para a barra semi-infinita

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \, x > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \geq 0; \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Aqui u_0 é contínua e limitada em $[0, \infty[$ e satisfaz $u_0(0) = 0$.