MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

7a. lista de exercícios

1. Seja Ω um aberto com fronteira regular em $\mathbb{R}^N$ e considere as sequências $\{\lambda_k\}$ e $\{v_k\}$, respectivamente dos autovalores e das correspondentes autofunções do operador de Laplace com condição de Dirichlet em Ω. Aqui $\{v_k\}$ é assumida normalizada em $L^2(\Omega)$, formando um sistema ortonormal completo (base hilbertiana) para este espaço de Hilbert. Seja $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u = 0$ em $\partial\Omega$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u(x)\, v_k(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq C/\lambda_k^{1/2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

2. Dado $\ell > 0$ discuta o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \text{ em }]0, \ell[\times]0, \infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \end{cases}$$

explicitando a regularidade do dado inicial e da solução obtida.

3. Seja $u(x, t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + u$$

em $]0, a[\times]0, T[\subset \mathbb{R}^2$, contínua em $[0, a] \times [0, T]$. Mostre que

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^T \max_\gamma |u|,$$

onde $\gamma \doteq (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{a\} \times [0, T]) \cup ([0, a] \times \{0\})$.