MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

6a. lista de exercícios

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Supinha que vale a seguinte propriedade:

- dado $x \in \Omega$ existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x)} u(y) \mathrm{d}\sigma(y), \ 0 < r \leq \delta.$$

Mostre que u é harmônica em Ω. *Sugestão:* Tente aplicar o argumento utilizado na segunda parte da demonstração da recíproca do teorema da média (veja também a sugestão do exercício 4 abaixo).

2. Seja Ω um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega \implies (x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) \in \Omega.$$

Seja u uma função harmônica em

$$\Omega_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega : \ x_N > 0\},$$

contínua em

$$\Omega_\bullet = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega : \ x_N \geq 0\}$$

e nula quando $x_N = 0$. Mostre que existe uma função harmônica $\tilde{u}$ em Ω que coincide com u em Ω_+.

3. Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \ x_2 > 0\}$. Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \text{ limitada;} \\ u(x_1, 0) = u_0(x_1), \ x_1 \geq 0; \\ u(0, x_2) = 0, \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

onde u_0 é contínua e limitada em $[0, \infty[$, $u_0(0) = 0$.

Observação. Lembre que a solução limitada do problema de Dirichlet para o semi-espaço $x_2 > 0$, com dado de fronteira $v_0(x_1)$ (contínua e limitada), é dada por

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(x_1 - y)^2 + x_2^2} \, v_0(y) \, \mathrm{d}y \, .$$

4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

1. $\Delta u(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$

2. Para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$ vale

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ry)\, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Sugestão: Para (1) $\Rightarrow$ (2) estude a derivada da função

$$g(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ty) \mathrm{d}\sigma(y), \quad 0 \leq t \leq r.$$

Para (2) $\Rightarrow$ (1) escreva a expansão de Taylor de ordem 2 de u em torno de x_0 e utilize o exercício 1 da lista 2.

5. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{H}(\Omega)$ o espaço constituído pelas funções harmônicas em Ω que pertencem a $L^2(\Omega)$. Mostre que $\mathcal{H}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$.

6. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{A} \subset C^\infty(\Omega)$ uma família de funções harmônicas satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $C > 0$ tal que $\sup_K |u| \leq C$, $\forall u \in \mathcal{A}$. Mostre que a mesma propriedade é válida para as famílias

$$\mathcal{A}_j \doteq \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} : u \in \mathcal{A} \right\}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Conclua, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli, que para todo $K \subset \Omega$ compacto, o conjunto $\{u|_K : u \in \mathcal{A}\} \subset C(K)$ é relativamente compacto em $C(K)$. Aqui, como é usual, estamos munindo $C(K)$ com a distância $d(f, g) = \sup_K |f - g|$.