MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

5a. lista de exercícios

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) aberto, $x_0 \in \Omega$ e u uma função harmônica em $\Omega \setminus \{x_0\}$. Siga os passos abaixo para mostrar que se

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{N-2} u(x) = 0 \tag{1}$$

então u e estende a uma função harmônica definida em Ω.

- Sejam $R > 0$ tal que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ e v harmônica em $B_R(x_0)$, contínua em $\overline{B_R(x_0)}$, tal que $v = u$ em $S_R(x_0)$ (por que existe tal v?). Mostre que a conclusão do resultado segue da seguinte afirmação:

$$u = v \text{ em } B_R(x_0) \setminus \{x_0\}. \tag{2}$$

- Para mostrar (2) considere $w = u - v$. Mostre que a hipótese implica que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{w(x)}{|x - x_0|^{2-N} - R^{2-N}} = 0.$$

- Seja $\varepsilon > 0$. Conclua que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| \leq \delta_0 \implies |w(x)| \leq \varepsilon\{|x - x_0|^{2-N} - R^{2-N}\}$$

- Seja $U_\delta = \{x : \delta < |x - x_0| < R\}$. Mostre que se $0 < \delta \leq \delta_0$ então

$$|w(x)| \leq \varepsilon\{|x - x_0|^{2-N} - R^{2-N}\}, \quad x \in U_\delta.$$

  Sugestão: Observe que $x \mapsto |x - x_0|^{2-N} - R^{2-N}$ é harmônica e aplique o princípio do máximo em U_δ para as funções $\pm w(x) - \varepsilon\{|x - x_0|^{2-N} - R^{2-N}\}$.

- Conclua que

$$|w(x)| \leq \varepsilon\{|x - x_0|^{2-N} - R^{2-N}\}, \quad x \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\},$$

  de onde segue (2).