MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

4a. lista de exercícios

1. Sejam Ω um aberto regular de $\mathbb{R}^2$, com fronteira de classe C^1, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $x \in \Omega$ e

$$E(y) = \frac{1}{2\pi} \log |y| \quad y \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0.$$

Verifique a validade da fórmula

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)\, \Delta u(y)\, \mathrm{d}u + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \vec{n_y}} - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right\} \mathrm{d}\sigma(y).$$

2. Proceda formalmente para determinar a função de Green e a fórmula de Poisson para o semi-espaço

$$H = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

3. Verifique que a função de Green para a bola $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log |x-y| - \log[|x|^2|y|^2 + 1 - 2(x \cdot y)]^{1/2} \right\}.$$

4. Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^N$. Suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^{1/2}), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Mostre que u é constante.

5. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto. Denotando por $E(x)$ o potencial newtoniano em $\mathbb{R}^N$ mostre que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

é de classe C^∞ e que $\Delta u = f$ em $\mathbb{R}^N$.

6. Seja u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$. Mostre que

$$v(y) = u\left(\frac{y_1}{|y|^2}, -\frac{y_2}{|y|^2} \right)$$

é harmônica em $U = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < 1\}$. *Sugestão:* Para simplificar os cálculos defina $g_1 = y_1|y|^{-2}$, $g_2 = -y_2|y|^{-2}$ e mostre, primeiramente, que $(g_1)_{y_1} = (g_2)_{y_2}$ e também que $(g_1)_{y_2} = -(g_2)_{y_1}$.

7. Seja Ω como no exercício anterior. Demonstre a unicidade para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = u_0 & \text{em} \quad S_1(0). \end{cases}$$

Aqui assumimos u_0 contínua em $S_1(0)$ e impomos u contínua e limitada em $\overline{\Omega}$.

8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$. Mostre que $u \in C^\infty(\Omega)$. *Sugestão:* É suficiente mostrar que $u|_B$ é de classe C^∞ para qualquer bola aberta B com fecho contido em Ω. Fixada uma tal bola mostre que existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ coincidindo com f em B (para tal consulte a apostila de Cálculo Integral, página 33, Lema 4.1). Resolva $\Delta v = g$ utilizando o exercício 5 acima.