MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

3a. lista de exercícios

1. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, e seja u uma função harmônica em Ω. Mostre que para cada subconjunto compacto K de Ω vale a desigualdade

$$\sup_{x\in K}|u(x)| \leq \frac{N}{\omega_N \mathrm{dist}\,(K,\partial\Omega)^N}\int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Conclua o seguinte resultado: *se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ e se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então $u = 0$.*

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e com fronteira regular. Seja também $g \in C(\bar{\Omega})$. Mostre que não existe solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ para o problema

$$\begin{cases} (\Delta u)\,(x) = e^{g(x)}, \ x \in \Omega; \\ (\partial u/\partial \vec{n})(y) = 0, \ y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui $\vec{n}$ é normal a $\partial\Omega$ e exterior a Ω.

3. Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e considere uma sequência $\{u_j\}$ de funções harmônicas em Ω, cada uma delas contínua em $\bar{\Omega}$. Suponha que

$$\max_{y\in\partial\Omega}|u_j(y) - u_k(y)| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k}, \qquad j,k = 1,2,\ldots$$

Mostre que $\{u_j\}$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ para uma função $u \in C(\bar{\Omega})$, que é ainda harmônica em Ω.

4. Seja $D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Suponha que exista u harmônica em D, contínua em $\bar{D}$ e que coincide com a função $2x_1^2$ em ∂D. Determine $u(0)$.

5. Sejam $U = \{x : \ x \in \mathbb{R}^N, \ x \neq 0\}$ e $f \in C^2(U)$. Defina, para $x \in U$,

$$f_\sharp(x) = \int_{S_1(0)} f(|x|\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega).$$

Mostre que $\Delta(f_\sharp) = (\Delta f)_\sharp$.

Sugestão: Utilize o teorema da divergência e a fórmula de integração em coordenadas polares.