MAP0413 - 1o. Semestre de 2018

2a. lista de exercícios

1. Calcule as integrais
$$\int_{S_1(0)} y_j \mathrm{d}\sigma(y), \quad \int_{S_1(0)} y_j y_k \mathrm{d}\sigma(y).$$

2. Escreva as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ na forma (x, y) e considere os ODPL com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Mostre que
$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\{u_j\}$ uma sequência em $C^2(\Omega)$. Assuma que cada u_j é harmônica em Ω e que as sequências $\{\partial^\alpha u_j\}$, $|\alpha| \leq 2$, convirjam uniformemente sobre os subconjuntos compactos de Ω. Mostre que $u = \lim_j u_j$ é harmônica em Ω.

4. Sejam $R > 0$ e $f : S_R(0) \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que
$$\int_{S_R(0)} f(y)\mathrm{d}\sigma(y) = R^{N-1}\int_{S_1(0)} f(Rz)\mathrm{d}\sigma(z).$$
Sugestão: Mostre, primeiramente, que esta fórmula é válida para $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ escrevendo a expansão de Taylor de f de ordem 1 na origem na forma
$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x)x_j, \text{ com } g_j \in C^1(\mathbb{R}^N),$$
e aplicando o teorema da divergência para o campo $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N)$. Conclua o caso geral evocando o teorema de Stone-Weierstrass.

5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e conexo. Seja, também, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $tf(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que toda solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema
$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ em } \Omega \\ \partial u/\partial \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$
é necessariamente constante (aqui $\vec{n}$ denota a normal unitária exterior a $\partial\Omega$). Determine, também, uma condição adicional sobre f que garanta que toda solução de $(*)$ se anula identicamente.

- - - o o o - - -