MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

11a. lista de exercícios

1. Considere o problema

$$(\flat)\qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \text{ em }]0,\pi[\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=f(x),\ x\in[0,\pi] \\ u_t(x,0)=g(x),\ x\in[0,\pi] \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Suponha que $f\in C^3([0,\pi])$ e que $g\in C^2([0,\pi])$. Mostre que as condições de compatibilidade de $(\flat)$ são $f(0)=f(\pi)=g(0)=g(\pi)=f''(0)=f''(\pi)=0$ e que o problema $(\flat)$ admite uma solução de classse C^2 em $[0,\pi]\times\mathbb{R}$.

2. Sejam $\omega\in\mathbb{R}^N$, $|\omega|=1$ e $F\in C^2(\mathbb{R})$. Mostre que

$$u(x,t)=F(\langle x,\omega\rangle\pm t)$$

satisfazem $\Box u=0$ em $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$.

3. Seja $\omega\in\mathbb{R}^N$, $|\omega|=1$. Dadas $f\in C^2(\mathbb{R})$, $g\in C^11(\mathbb{R})$, resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta_x=0 \text{ em } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=f(\langle x,\omega\rangle)) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0)=g(\langle x,\omega\rangle) \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

4. Seja $\Theta: S_1(0)\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Dada $f\in C(\mathbb{R})$ defina $\mathrm{T}(f):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ pela regra

$$\mathrm{T}(f)(x)=\int_{S_1(0)} f\left(\langle x,\omega\rangle\right)\Theta(\omega)\sigma(\omega),\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Mostre que se $f\in C^k(\mathbb{R})$ então $\mathrm{T}(f)\in C^k(\mathbb{R}^N)$, $k=0,1,\ldots,\infty$.

5. Dadas $f\in C^2(\mathbb{R})$ e $g\in C^1(\mathbb{R})$ resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta_x=0 \text{ em } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=\mathrm{T}(f)(x) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0)=\mathrm{T}(g)(x) \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

6. Determine a solução geral de

$$u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0$$

em $\mathbb{R}^2$. Ainda sob estas condições determine a solução $u(x,t)$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x) & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

Qual a regularidade que você está assumindo para f e g?