MAP 413 - 1o. Semestre de 2018

10a. lista de exercícios

1.. Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, ambas se anulando no complementar de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, e seja também $u(x,t)$ a solução do problema

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x).$$

Mostre que para cada $t \geq 0$ a função

$$x \mapsto u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2$$

se anula no complementar de um compacto de $\mathbb{R}$. Considere a função energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2 \right] \mathrm{d}x.$$

Mostre que $t \mapsto E(t)$ é constante,

2. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u(x,y,0) = f(x) + F(y) \\ u_t(x,y,0) = g(x) + G(y). \end{cases}$$

Determine condições mínimas de regularidade sobre f, F, g, G para que o problema acima tenha solução de classe C^2 em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Determine u.

3. Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x, t \in \mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}; \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Dado $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ com $t > 0$ seja K o compacto de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é definido pelo triângulo com vértices $A = (x,t)$, $B = (x+t, 0)$, $C = (x-t, 0)$. Suponha que $g \leq 0$ em $\overline{BC}$. Mostre que o máximo de u em K é assumido em $\overline{BC}$.

4. Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Considere, para cada (x,t) fixado, com $t \neq 0$, a região $D(x,t)$ delimitada pelo eixo x e pelas retas determinadas pelos pontos (x,t), $(x-t,0)$ e (x,t), $(x+t,0)$. Mostre que

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{D(x,t)} [u_{tt}(y,s) - u_{xx}(y,s)] \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s.$$

5. Seja $q \in C(\mathbb{R}^2)$ com $\|q\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < 2$. Utilize o exercício anterior para mostrar que se

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + q(x,t)u = 0 \ \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

então $u \equiv 0$.

6. Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função par. Mostre que a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \phi(|x|),\ u_t(x,0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

é da forma $u(x,t) = v(|x|,t)$. Obtenha a fórmula explícita de u e determine sua regularidade.

7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a^2 - b^2 = 4c$. Determine a solução geral de

$$u_{tt} - u_{xx} + au_t + bu_x + cu = 0$$

em $\mathbb{R}^2$. Ainda sob estas condições determine a solução $u(x,t)$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + au_t + bu_x + cu = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

8. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 1 + x^2,\ u_t(x,0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Resolva este problema escrevendo a solução na forma

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) t^j,$$

substituindo esta expressão na equação e determinando os coeficientes $a_j(x)$ por relações de recorrência. *Resposta:* $u(x,t) = (1 + x^2)\cosh t + t \operatorname{senh} t$.