MAP0413 - 1o. Semestre de 2018

1a. lista de exercícios

1. Mostre que se u é harmônica em $\mathbb{R}^N$ e se $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação ortogonal então $u \circ T$ também é harmônica em $\mathbb{R}^N$. Lembre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é *ortogonal* se $({}^tT)T = T({}^tT) = I$, a aplicação identidade.

2. Determine todas as funções harmônicas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da forma $u(x) = f(|x|)$, onde $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

3. Use o resultado obtido no exercício anterior para obter u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$, onde $0 < r < R < \infty$, contínua em $\bar{\Omega}$ e satisfazendo $u(x) = a$ se $|x| = r$, $u(x) = b$ se $|x| = R$ (a e b são constantes reais).

4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, u harmônica em Ω e $x_0 \in \Omega$. Mostre que se $N \geq 2$ então $u^{-1}\{u(x_0)\}$ é infinito. E quando $N = 1$?

5. Fixado $y \in \mathbb{R}^N$ defina

$$V(x) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^N}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}.$$

   Mostre que V é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{y\}$.

- - - o o o - - -