

MAP0413 - 1o. semestre de 2018

FUNÇÕES HARMÔNICAS

Notas de Antonio Victor da Silva Junior e

Paulo D. Cordaro

1a. versão - maio de 2018

1 Preliminares - O problema de Dirichlet

Denotaremos por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$$

o operador de Laplace (ou laplaciano) em \mathbb{R}^N .

1.1 DEFINIÇÃO. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ é dita *harmônica em Ω* se $\Delta u = 0$ em Ω .

Note que se u é a valores complexos então u é harmônica se, e somente se, $\operatorname{Re} u$ e $\operatorname{Im} u$ são harmônicas; isto se deve ao fato de Δ ser um operador com coeficientes reais. Assim, para o estudo das propriedades das funções harmônicas podemos nos restringir ao caso em que as funções são a valores reais.

1.2 EXEMPLO. São exemplos de funções harmônicas

1. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $u(x) = a + \langle x, b \rangle$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^N$;
2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa então $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são harmônicas;
3. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$. Se $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N$ satisfaz $\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_N^2 = 0$, então $u(x) = \operatorname{Re} e^{\langle x, \zeta \rangle}$ e $v(x) = \operatorname{Im} e^{\langle x, \zeta \rangle}$ são harmônicas.

1.3 TEOREMA. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

1. Se $\Delta u \geq 0$, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

2. Se $\Delta u \leq 0$, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.4 COROLÁRIO. (*Princípio do máximo, forma fraca*) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω . Então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.5 OBSERVAÇÃO. Se u é harmônica e se $|u(x)| \leq M$ para $x \in \partial\Omega$ segue do Corolário 1.4 que $|u(x)| \leq M$ para $x \in \Omega$. Em particular, se $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, então $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração do Teorema 1.3. Mostraremos (1.), a demonstração de (2.) é análoga. Consideremos

$$m = \max_{\partial\Omega} u,$$

$$M = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Suponha, por absurdo, que $m < M$. Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$ e, ademais, vale $\nabla u(x_0) = 0$ e $\Delta u(x_0) \leq 0$. Seja $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ a função dada por

$$v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2,$$

em que $\varepsilon > 0$ é um número que determinaremos a seguir. Temos $v(x_0) = M$, e para $x \in \partial\Omega$, vale $v(x) \leq m + \varepsilon\delta(\Omega)^2$, em que $\delta(\Omega)$ é o *diâmetro* de Ω . Logo, se escolhermos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < (M - m)/\delta(\Omega)^2$, teremos $v(x) < M$. Tal escolha implica que existe $x_1 \in \Omega$ um ponto no qual a função v assume seu valor máximo. Mas $\Delta v(x_1) = \Delta u(x_1) + 2N\varepsilon \geq 2N\varepsilon > 0$, uma contradição. \square

O problema de Dirichlet para Ω consiste em, dada $u_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, determinar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = u_0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

1.6 DEFINIÇÃO. Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito um *aberto de Dirichlet* se o problema de Dirichlet tiver solução para toda u_0 .

Note que o problema de Dirichlet admite no máximo uma solução, uma consequência do resultado enunciado na observação 1.5.

1.7 DIGRESSÃO. Sejam Ω um aberto de Dirichlet e $x \in \Omega$. O funcional

$$T : \mathcal{C}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada $u_0 \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ o valor $u(x)$, em que u é a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira u_0 , está bem definido, é contínuo, pois $|T(u_0)| \leq \max |u_0|$, e é positivo. Pelo teorema de Riesz, existe uma medida de Borel regular μ_x sobre $\partial\Omega$ tal que

$$u(x) = T(u_0) = \int_{\partial\Omega} u_0(y) d\mu_x(y),$$

e portanto a função u é reconstituída através de integração de seu valor de fronteira com relação a medidas apropriadas.

2 Identidades de Green

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um *aberto com fronteira regular* como definido nas notas de aula da disciplina “Cálculo Integral”, página 66, em

www.ime.usp.br/~cordaro/calculo-integral-2o-semester-de-2017

Sejam \vec{n} o campo unitário normal a $\partial\Omega$ e $d\sigma$ a medida de superfície definida em $\partial\Omega$. Nas notas de aula mencionadas acima encontra-se a demonstração do *teorema da divergência* se \vec{X} é um campo vetorial com coeficientes em $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ vale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{X}(y), \vec{n}(y) \rangle d\sigma(y). \quad (1)$$

Sejam $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Aplicando o teorema da divergência para $\vec{X} = v\nabla u$ obtemos a *primeira identidade de Green*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma. \quad (2)$$

Trocando u por v e subtraindo as identidades obtemos a *segunda identidade de Green*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma. \quad (3)$$

Como consequência da primeira identidade de Green temos a seguinte proposição

2.1 PROPOSIÇÃO. *Seja $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ uma função harmônica em Ω .*

1. *Se $\partial u / \partial \vec{n} = 0$ em $\partial\Omega$, então u é localmente constante em Ω ;*
2. *Vale a seguinte identidade*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = 0.$$

Demonstração. Ambos os itens seguem da primeira identidade de Green (2) para (1.) tome $u = v$ e para (2.) tome $v = 1$. □

3 A propriedade da média

Denotaremos a esfera de raio $R > 0$ e centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$ por $S_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| = R\}$ e a bola aberta de raio $R > 0$ e centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^N$ por $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < R\}$. Note que $B_R(x_0)$ é um aberto com fronteira regular. A passagem a coordenadas polares em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é feita com as identidades

$$\begin{cases} x = ry, & r = |x|, \quad |y| = 1, \\ dx = r^{N-1} dr d\sigma(y), \end{cases}$$

em que $d\sigma$ é a medida de superfície em $S_1(0)$. Denotaremos a medida da esfera unitária em \mathbb{R}^N por

$$\omega_N = |S_1(0)| = \int_{S_1(0)} d\sigma.$$

Nosso objetivo agora é calcular ω_N e para isso introduzimos a função gama

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Um simples cálculo¹ mostra que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Ademais $\Gamma(1) = 1$, logo temos $\Gamma(n) = (n-1)!$, para $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$. Da identidade

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds,$$

segue que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Agora

$$\begin{aligned} \pi^{N/2} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx \\ &= \int_0^\infty \int_{S_1(0)} e^{-r^2} r^{N-1} d\sigma(y) dr \\ &= \omega_N \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr \\ &= \frac{\omega_N}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{N-2}{2}} ds \\ &= \frac{\omega_N}{2} \Gamma(N/2), \end{aligned}$$

logo

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Assim, para $N = 2k$ temos $\Gamma(N/2) = (k-1)!$ e portanto

$$\omega_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}.$$

Por outro lado, para $N = 2k+1$ temos

$$\Gamma(N/2) = \Gamma(k+1/2) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \Gamma(1/2) \prod_{l=1}^k \left(k - \frac{2l-1}{2}\right),$$

portanto

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k-1)(2k-3) \cdots 1}.$$

¹use $\frac{d}{dt} t^x = x t^{x-1}$ e integre por partes.

Podemos também calcular o volume da bola

$$\begin{aligned}
|B_R(x_0)| &= |B_R(0)| \\
&= \int_{B_R(0)} dx \\
&= \int_0^R \int_{S_1(0)} r^{N-1} d\sigma(y) dr \\
&= \frac{R^N \omega_N}{N}.
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência (1), temos a identidade

$$N|B_R(0)| = \int_{S_R(0)} \langle y, y/R \rangle d\sigma(y) = R|S_R(0)|,$$

que implica $|S_R(x_0)| = \omega_N R^{N-1}$. Por fim, faremos uso constante do seguinte fato

$$\int_{S_R(0)} f(y) d\sigma(y) = R^{N-1} \int_{S_1(0)} f(Rz) d\sigma(z), \quad f \in \mathcal{C}(S_R(0)). \quad (4)$$

Para a demonstração da fórmula acima veja o exercício 8.

3.1 TEOREMA. (A PROPRIEDADE DA MÉDIA PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e u uma função harmônica em Ω . Se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R(x_0)|} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y).$$

3.2 OBSERVAÇÃO. Aplicando (4) no Teorema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(0)} u(x_0 + y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + Rz) d\sigma(z).
\end{aligned}$$

Demonstração (do Teorema 3.1). Definimos

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x - x_0|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ -\log|x - x_0|, & N = 2. \end{cases}$$

Um cálculo direto mostra que v é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$. Faremos a demonstração para o caso $N \geq 3$, o caso $N = 2$ tem demonstração análoga. Para $0 < \varepsilon < R$, seja $U_\varepsilon = B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$. Aplicando a segunda identidade de Green (3), temos

$$\int_{\partial U_\varepsilon} \left(u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) - v(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right) d\sigma(y) = 0.$$

Como v é constante em cada componente de $\partial U_\varepsilon = S_R(x_0) \cup S_\varepsilon(x_0)$, podemos aplicar a Proposição 2.1 e concluir

$$\int_{S_R(x_0)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) d\sigma(y) = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) d\sigma(y).$$

Para $y \in S_R(x_0)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(y) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial y_j}(y) \frac{y_j - x_{0j}}{R} \\ &= \sum_{j=1}^N (2-N) |y - x_0|^{1-N} \frac{(y_j - x_{0j})^2}{|y - x_0| R} \\ &= (2-N) R^{1-N},\end{aligned}$$

logo

$$(2-N) R^{1-N} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) = (2-N) \varepsilon^{1-N} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y),$$

e portanto

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y) \rightarrow u(x_0),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois u é contínua em x_0 . De fato, para formalizar esta última afirmação seja $\eta > 0$ arbitrário e tomemos $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |u(x) - u(x_0)| < \eta.$$

Certamente podemos escrever esta propriedade assumindo que a bola de centro x_0 e raio $\delta > 0$ está contida em Ω . Logo, se $0 < \varepsilon < \delta$,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y) - u(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y) - u(x_0) \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} |u(y) - u(x_0)| d\sigma(y) \leq \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} \eta d\sigma(y) = \eta,\end{aligned}$$

o que demonstra nossa afirmação. \square

3.3 COROLÁRIO. (A PROPRIEDADE DA MÉDIA VOLUMÉTRICA) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e u uma função harmônica em Ω . Se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx.$$

Demonstração. Para $0 \leq \rho \leq R$, temos

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y) d\sigma(y),$$

logo

$$\int_0^R \rho^{N-1} u(x_0) d\rho = \frac{1}{\omega_N} \int_0^R \int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y) \rho^{N-1} d\sigma(y) d\rho,$$

e portanto

$$u(x_0) = \frac{N}{R^N \omega_N} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx.$$

\square

3.4 COROLÁRIO. (Princípio do máximo, forma forte) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e conexo. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ real e harmônica. Suponha que $\sup u = a < \infty$. Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = a$, então $u = a$ em Ω .*

Demonstração. Por hipótese o conjunto

$$A = \{x \in \Omega : u(x) = a\}$$

é não vazio. Como A é claramente fechado em Ω (por que?) e também como Ω é conexo, bastará mostrar que A é aberto em Ω . Seja então $x_* \in A$ e tomemos uma bola $B_r(x_*)$ com fecho contido em Ω . Como $a = \sup u$ temos, pela propriedade da média volumétrica

$$\frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_r(x_*)} \underbrace{\{a - u(x)\}}_{\geq 0} dx = 0,$$

de onde concluímos que $u(x) = a$ para $x \in B_r(x_*)$. A demonstração está completa. \square

Nosso objetivo agora é provar a recíproca do Teorema 3.1

3.5 TEOREMA. *Seja $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ e suponha que para cada $x_0 \in \Omega$ temos*

$$u(x_0) = \frac{1}{R^{N-1}\omega_N} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y),$$

sempre que $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$ (distância de x_0 a $\partial\Omega$). Então $u \in C^\infty(\Omega)$ e é uma função harmônica em Ω .

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 3.5, precisamos desenvolver algumas ferramentas

3.6 DIGRESSÃO. (FUNÇÕES TESTE) A função

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

é de classe C^∞ em \mathbb{R} , logo a função $g(t) = h(1-t)h(1+t)$ é de classe C^∞ , se anula fora do intervalo $[-1, 1]$ e vale $g(0) > 0$. Para $x \in \mathbb{R}^N$, definimos

$$\varphi(x) = Ag(|x|^2), \quad \text{com } A = \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(|y|^2) dy \right)^{-1},$$

logo φ é de classe C^∞ em \mathbb{R}^N , se anula fora de $B_1(0)$, vale $\int \varphi = 1$ e φ é *radial*, ou seja, o valor $\varphi(x)$ só depende de $|x|$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

de modo que φ_ε é de classe C^∞ em \mathbb{R}^N , se anula fora de $B_\varepsilon(0)$, vale $\int \varphi_\varepsilon = 1$ e φ_ε é radial.

Demonstração (do Teorema 3.5) Para cada $\varepsilon > 0$, considere o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

A função dada por

$$\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto \varphi_\varepsilon(x - y) \in \mathbb{R}$$

é de classe C^∞ e para cada $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado, a correspondente função em $y \in \mathbb{R}^N$ se anula no complementar de um subconjunto compacto de Ω . Logo, verifica-se que a função

$$U_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x - y)u(y) dy,$$

é de classe C^∞ em Ω_ε (derivação sob o sinal de integração). Mostraremos abaixo que para $x \in \Omega_\varepsilon$, tem-se $U_\varepsilon(x) = u(x)$, o que pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ permite concluir que u é de classe C^∞ . De fato

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy \\
&= \int_{B_1(0)} u(x - \varepsilon y) \varphi(y) \, dy \\
&= \int_{S_1(0)} \int_0^1 u(x - \varepsilon r \dot{y}) \varphi(r \dot{y}) r^{N-1} \, dr \, d\sigma(\dot{y}) \\
&= A \int_0^1 r^{N-1} g(r^2) \underbrace{\left(\int_{S_1(0)} u(x - \varepsilon r \dot{y}) \, d\sigma(\dot{y}) \right)}_{=\omega_N u(x)} \, dr \\
&= Au(x) \int_{B_1(0)} g(|x|^2) \, dx \\
&= u(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que a função u é harmônica e para isto faremos uso do seguinte lema:

3.7 LEMA. *Sejam $v \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e para $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$ defina a função*

$$\lambda(r) = \int_{S_1(0)} v(x_0 + ry) \, d\sigma(y).$$

Então

$$\lambda'(r) = r^{N-1} \int_{S_r(x_0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(z) \, d\sigma(z).$$

Assumindo a validade do lema por um momento vamos concluir a demonstração do teorema. Aplicando o Lema 3.7 com u substituindo v e observando que então λ é constante seguirá que

$$\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\sigma(y) = \int_{B_r(x_0)} \Delta u \, dx,$$

quaisquer que sejam $x_0 \in \Omega$ e $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$. Assim $\Delta u = 0$ em Ω e portanto resta agora demonstrar o Lema 3.7.

Demonstração. (do Lema 3.7) Um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned}
\lambda'(r) &= \int_{S_1(0)} \langle \nabla v(x_0 + ry), y \rangle \, d\sigma(y) \\
&= r^{N-1} \int_{S_r(0)} \langle \nabla v(x_0 + z), z/r \rangle \, d\sigma(z) \\
&= r^{N-1} \int_{S_r(x_0)} \langle \nabla v(y), (y - x_0)/r \rangle \, d\sigma(y),
\end{aligned}$$

de onde segue a conclusão. □

3.8 COROLÁRIO. *Toda função harmônica é de classe C^∞ .*

3.9 COROLÁRIO. *Seja $\{u_n\}$ uma seqüência de funções harmônicas em Ω . Se $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre os compactos de Ω , então u é uma função harmônica.*

Demonstração. A função u é contínua pois é limite uniforme sobre os compactos de Ω de uma sequência de funções contínuas. Para provar que u é harmônica basta então mostrar que u satisfaz a propriedade da média. Seja então $B_R(x_0)$ uma bola com fecho contido em Ω . Como cada u_n é harmônica temos

$$u_n(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x_0)} u_n(y) d\sigma(y), \quad 0 < r \leq R.$$

Passando ao limite estas igualdades quando $n \rightarrow \infty$ segue a propriedade desejada, uma vez que a convergência uniforme sobre os compactos de Ω da sequência $\{u_n\}$ implica

$$\frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x_0)} u_n(y) d\sigma(y) \longrightarrow \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x_0)} u(y) d\sigma(y).$$

□

3.10 COROLÁRIO. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Suponha que o problema de Dirichlet para Ω possui solução sempre que o valor na fronteira for a restrição de um polinômio em \mathbb{R}^N . Então Ω é um aberto de Dirichlet.*

Demonstração. Seja $u_0 \in C(\partial\Omega)$. Pelo teorema de Stone-Weierstrass existe uma sequência $\{p_n\}$ de polinômios em \mathbb{R}^N tal que $p_n \rightarrow u_0$ uniformemente em $\partial\Omega$. Para cada n existe $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmônica em Ω satisfazendo $u_n = p_n$ em $\partial\Omega$. Pelo Corolário 1.4

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |p_m - p_n| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Pelo critério de Cauchy para convergência uniforme, existe $u \in C(\bar{\Omega})$ tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente em Ω . Em particular $u = u_0$ em $\partial\Omega$. Finalmente, pelo corolário anterior u é harmônica, e portanto de classe C^∞ em Ω . □

Vimos que toda solução de classe C^2 da equação $\Delta u = 0$ é automaticamente de classe C^∞ . Na realidade podemos dizer mais toda função harmônica é de fato real-analítica. Lembremos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e se $f \in C^\infty(\Omega)$ então f é *real-analítica* se para cada ponto $x_0 \in \Omega$ a série de Taylor de f centrada em x_0 converge para f , uniforme e absolutamente, em uma vizinhança de x_0 . Uma propriedade equivalente é a seguinte $f \in C^\infty(\Omega)$ é real-analítica se, e somente se, para toda bola fechada B contida em Ω existem constantes $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$\sup_B |\partial^\alpha u| \leq Ch^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \quad (5)$$

Para uma demonstração consultar o texto "analíticas" em

www.ime.usp.br/~cordaro/analise-real-1o-semester-de-2017.

3.11 TEOREMA. *Toda função harmônica u em um aberto Ω de \mathbb{R}^N é real-analítica em Ω .*

Demonstração. Como u é de classe C^∞ é fácil então ver que $\partial^\alpha u$ também é harmônica, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tal que $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω . Se $j \in \{1, \dots, N\}$ aplicando a propriedade da média volumétrica para $\partial u / \partial x_j$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx.$$

Seja $\vec{X}(x) = (0, \dots, 0, u(x), 0, \dots, 0)$, onde $u(x)$ aparece na j -ésima posição. Então $\text{div } \vec{X}(x) = (\partial u / \partial x_j)(x)$ e portanto, pelo teorema da divergência,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{S_r(x_0)} \langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle d\sigma(y).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{R} \sup_{S_R(x_0)} |u|.$$

Sejam $B \subset B' \subset \Omega$ bolas fechadas com raios r e r' respectivamente, $r < r'$. Aplicando a desigualdade precedente para um ponto arbitrário $x_0 \in B$ e $R = r' - r$ obtemos

$$\sup_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq \frac{N}{r' - r} \sup_{B'} |u|, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Estamos agora em posição para concluir a demonstração do teorema. Fixemos $B_r(x_*)$ uma bola com fecho contido em Ω e seja $d > 0$ tal que a bola $B_{r+d}(x_*)$ também tenha fecho contido em Ω . Seja α um multi-índice e aplique (6) iteradamente, para as bolas $B \doteq B_{r+(i-1)d/|\alpha|}(x_*) \subset B' \doteq B_{r+id/|\alpha|}(x_*)$, $i = 1, \dots, |\alpha|$. Obtemos

$$\sup_{B_r(x_*)} |D^\alpha u| \leq \frac{N^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}}{d^{|\alpha|}} \sup_{B_{r+d}(x_*)} |u|.$$

Uma vez que $n^n < e^n n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ provamos que u satisfaz (5) e portanto u é real-analítica em Ω . A demonstração está completa. \square

4 Potencial newtoniano

O *potencial newtoniano* é dado pela expressão

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(N-2)\omega_N |x|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log |x|, & N = 2. \end{cases}$$

Demonstra-se que E é uma função harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e pertence a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Para esta última informação basta mostrar que E é integrável em $B_1(0)$ e isto segue facilmente se escrevermos a integral de $-E(x)$ sobre $B_1(0)$ em coordenadas polares.

4.1 TEOREMA. (TERCEIRA IDENTIDADE DE GREEN) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular. Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Para todo $x \in \Omega$ vale*

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_y}(x-y) - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right) d\sigma(y).$$

Demonstração. Fixe $x \in \Omega$. Para $0 < \varepsilon < d(x, \partial\Omega)$, seja $U_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{U_\varepsilon} E(x-y) \Delta u(y) \, dy = \\ \int_{\partial\Omega} \left(E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_y}(x-y) \right) d\sigma(y) \\ - \int_{S_\varepsilon(x)} \left(E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(x-y) \right) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Usando $\nabla E(x) = x/(\omega_N|x|^N)$ qualquer que seja $N \geq 2$, podemos passar ao limite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_\varepsilon} E(x-y) \Delta u(y) \, dy &= \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) \, dy, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x)} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(y) \, d\sigma(y) &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(x-y) \, d\sigma(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y) \, d\sigma(y) = u(x), \end{aligned}$$

e segue a tese. \square

4.2 COROLÁRIO. *Seja $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ uma função com suporte compacto, ou seja, que se anule no complementar de um subconjunto compacto de \mathbb{R}^N . Então*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y) \Delta u(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

5 Função de Green

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e suponha que para cada $x \in \Omega$ o seguinte problema de Dirichlet tenha solução

$$\begin{cases} \Delta v_x = 0, & \text{em } \Omega, \\ v_x = E(x - \cdot), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

com $v_x \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. A função de Green para Ω é dada por

$$G(x, y) = E(x-y) - v_x(y), \quad (x, y) \in (\Omega \times \overline{\Omega}) \setminus \{(z, z) \mid z \in \Omega\}.$$

Como função de y , a função $G(x, \cdot)$ é harmônica para $y \neq x$ e $G(x, \cdot) = 0$ em $\partial\Omega$.

Suponha agora que Ω seja um aberto com fronteira regular e seja $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Aplicando o Teorema 4.1 (terceira identidade de Green), temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\Omega} v_x(y) \Delta u(y) \, dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) + u(y) \frac{\partial v_x}{\partial \vec{n}_y}(y) - v_x(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y}(y) \right) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Por outro lado, a segunda identidade de Green (3) nos dá

$$\int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial v_x}{\partial \vec{n}_y}(y) - v_x(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y}(y) \right) d\sigma(y) = - \int_{\Omega} v_x(y) \Delta u(y) \, dy.$$

Portanto, temos a seguinte identidade (denominada *fórmula de Poisson*)

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) \, d\sigma(y).$$

Em suma, temos o seguinte teorema

5.1 TEOREMA. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular. Se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = u_0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $u_0 \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, então

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) d\sigma(y).$$

5.2 EXEMPLO. (FUNÇÃO DE GREEN PARA A BOLA UNITÁRIA) Consideremos $\Omega = B_1(0)$, com $N \geq 3$. Ou seja, temos

$$E(x - y) = \frac{1}{\omega_N(2 - N)} |x - y|^{2-N}, \quad x \neq y.$$

Seja $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$. A função dada por $v_x(y) = |x|^{2-N} E(x^* - y)$ é harmônica em $B_1(0)$ quando $x^* \notin \overline{B_1(0)}$. Tomemos x^* o simétrico de x com relação a $S_1(0)$, ou seja, temos $x^* = x/|x|^2$. A propriedade fundamental de x^* é

$$|x - y| = |x| |x^* - y|, \quad \text{para } |y| = 1.$$

De fato

$$\langle x^* - y, x^* - y \rangle = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2}{|x|^2} \langle x, y \rangle + |y|^2,$$

logo

$$|x|^2 |x^* - y|^2 = 1 - 2 \langle x, y \rangle + |x|^2 = |x - y|^2.$$

Portanto temos $v_x(y) = E(x - y)$ se $|y| = 1$ para $x \neq 0$. Quando $x = 0$, temos $E(0 - y) = 1/(\omega_N(2 - N))$ para $|y| = 1$, logo podemos tomar $v_0(y) = 1/(\omega_N(2 - N))$, $\forall y \in \overline{B_1(0)}$.

Conclusão Para cada $x \in \Omega = B_1(0)$, resolvemos o problema de Dirichlet (7), portanto a função de Green para $B_1(0)$ é dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} E(x - y) - |x|^{2-N} E(x^* - y), & x \neq 0, \\ E(y) - \frac{1}{\omega_N(2 - N)}, & x = 0, \end{cases} \quad (8)$$

em que $x^* = x/|x|^2$.

5.3 OBSERVAÇÃO. Um raciocínio análogo ao do Exemplo 5.2 permite concluir que a função de Green para $B_1(0)$ quando $N = 2$ é

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| - \frac{1}{2\pi} \log |x| |x^* - y|, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi} \log |y|, & x = 0, \end{cases} \quad (9)$$

em que $x^* = x/|x|^2$.

5.4 EXEMPLO. (NÚCLEO DE POISSON PARA A BOLA UNITÁRIA) Dando continuidade ao estudado no Exemplo 5.2, temos para $x \neq 0$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) = \frac{1}{\omega_N} \left\langle -\frac{x - y}{|x - y|^N} + \frac{|x|^{2-N}(x^* - y)}{|x^* - y|^N}, y \right\rangle,$$

e usando o fato

$$\frac{|x|^{-N}}{|x^* - y|^N} = \frac{1}{|x - y|^N},$$

segue

$$K(x, y) = \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) = \frac{1}{\omega_N |x - y|^N} \langle y - x + x - |x|^2 y, y \rangle = \frac{1 - |x|^2}{\omega_N |x - y|^N} \quad (10)$$

É um exercício verificar que a fórmula (10) também vale quando $N = 2$. A função K definida pela fórmula (10) é denominada *núcleo de Poisson para $B_1(0)$* . O núcleo de Poisson possui as seguintes propriedades (exercício)

1. Quaisquer que sejam $x \in B_1(0)$ e $y \in S_1(0)$, temos $K(x, y) > 0$;

2. Para todo $x \in B_1(0)$, vale

$$\int_{S_1(0)} K(x, y) d\sigma(y) = 1;$$

3. Quaisquer que sejam $x \in B_1(0)$ e $y \in S_1(0)$, temos $\Delta_x K(x, y) = 0$ (exercício 5);

4. Se $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ e $\Delta u = 0$ em $B_1(0)$, então

$$u(x) = \int_{S_1(0)} K(x, y)u(y) d\sigma(y), \quad x \in B_1(0).$$

5.5 TEOREMA. (SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A BOLA UNITÁRIA) *Seja $u_0 \in C(S_1(0))$. A função dada por*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{S_1(0)} K(x, y)u_0(y) d\sigma(y), & x \in B_1(0), \\ u_0(x), & x \in S_1(0), \end{cases}$$

é harmônica em $B_1(0)$ e contínua em $\overline{B_1(0)}$.

Demonstração. Derivando sob o sinal de integração, a propriedade (3.) do núcleo de Poisson implica que u é harmônica em $B_1(0)$. Só precisamos então mostrar que u é contínua em $y_0 \in S_1(0)$, arbitrário. Ou seja, temos que mostrar

$$\lim_{B_1(0) \ni x \rightarrow y_0} \int_{S_1(0)} K(x, y)u_0(y) d\sigma(y) = u_0(y_0). \quad (11)$$

Aplicando a propriedade (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$\int_{S_1(0)} K(x, y)u_0(y) d\sigma(y) - u_0(y_0) = \int_{S_1(0)} K(x, y)(u_0(y) - u_0(y_0)) d\sigma(y).$$

Escrevamos esta última integral como $I_1 + I_2$ em que

$$I_1 = \int_{V_0} K(x, y)(u_0(y) - u_0(y_0)) d\sigma(y),$$

$$I_2 = \int_{S_1(0) \setminus V_0} K(x, y)(u_0(y) - u_0(y_0)) d\sigma(y),$$

e V_0 é uma vizinhança de y_0 em $S_1(0)$ que escolheremos a seguir. Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos V_0 tal que se $y \in V_0$, então $|u_0(y) - u_0(y_0)| < \varepsilon/2$. Aplicando as propriedades (1.) e (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_1(0)} K(x, y) d\sigma(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para a outra parcela, temos

$$|I_2| \leq 2 \sup |u_0| \int_{S_1(0) \setminus V_0} K(x, y) d\sigma(y),$$

mas

$$\lim_{B_1(0) \ni x \rightarrow y_0} \int_{S_1(0) \setminus V_0} K(x, y) d\sigma(y) = 0,$$

uma vez que para x próximo de y_0 o denominador em (10) será limitado inferiormente e o numerador em (10) tenderá a zero. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $|I_2| \leq \varepsilon/2$ se $x \in B_1(0) \cap B_\delta(y_0)$. \square

5.6 OBSERVAÇÃO. Seja $u_0 \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Então a função

$$S_1(0) \ni y \mapsto u_0(x_0 + Ry) \in \mathbb{C},$$

é contínua em $S_1(0)$. Seja $U \in \mathcal{C}(\overline{B_1(0)})$ harmônica em $B_1(0)$ tal que $U(y) = u_0(x_0 + Ry)$ para $y \in S_1(0)$. Defina $u(x) = U((x - x_0)/R)$, $x \in B_R(x_0)$. Então u é harmônica em $B_R(x_0)$, contínua em $\overline{B_R(x_0)}$ e coincide com u_0 em $S_R(x_0)$. Se $x \in B_R(x_0)$, temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{S_1(0)} K\left(\frac{x - x_0}{R}, y\right) u_0(x_0 + Ry) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(0)} K\left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{z}{R}\right) u_0(x_0 + z) d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} K\left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{y - x_0}{R}\right) u_0(y) d\sigma(y) \\ &= \int_{S_R(x_0)} K_{R,x_0}(x, y) u_0(y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

em que

$$K_{R,x_0}(x, y) = \frac{1}{\omega_N R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^N}.$$

A função K_{R,x_0} é denominada *núcleo de Poisson para $B_R(x_0)$* .

A seguir, apresentaremos algumas consequências do Teorema 5.5.

5.7 TEOREMA. (SINGULARIDADES REMOVÍVEIS) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e seja $x_0 \in \Omega$. Se u é uma função harmônica em $\Omega \setminus \{x_0\}$ tal que*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{E(x - x_0)} = 0,$$

então existe \tilde{u} harmônica em Ω tal que $\tilde{u} = u$ em $\Omega \setminus \{x_0\}$.

Demonstração. Suponha que $N \geq 3$ (a demonstração para $N = 2$ é análoga). Podemos supor que u é uma função real. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \Subset \Omega$. Seja v a função harmônica em $B_\delta(x_0)$ tal que $v = u$ em $S_\delta(x_0)$. Seja $w = u - v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}$ (note que w é real e é harmônica em $B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$). É suficiente mostrar $w = 0$. A hipótese sobre u garante a validade do seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < r < \delta$ tal que

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \quad \forall x \in \overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Observe que a função $x \mapsto \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$ é positiva e harmônica em $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$, vale zero em $S_\delta(x_0)$ e é limitante superior de $|w(x)|$ em $S_r(x_0)$. Aplicando o Corolário 1.4 (princípio do máximo) para $\pm w(x) - \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$ em $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$, podemos concluir

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Como ε é arbitrário, segue que $w = 0$. □

5.8 EXEMPLO. (ZAREMBA) Seja $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$. E considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } S_1(0), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Suponha que o problema acima admita uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Como u é limitada em Ω , podemos aplicar o Teorema 5.7 (singularidades removíveis) e concluir que u é harmônica em $B_1(0)$. Logo, pelo Corolário 1.4 (princípio do máximo), temos $u = 0$ em $\overline{B_1(0)}$, uma contradição. Portanto, o problema de Dirichlet acima não admite solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Para o que segue, denotaremos

$$H = \{x \in \mathbb{R}^N : x = (x_1, \dots, x_N), x_N > 0\}.$$

5.9 TEOREMA. (PRINCÍPIO DA REFLEXÃO DE SCHWARZ) *Seja $u \in C(\overline{H})$ uma função harmônica em H . Suponha que $u = 0$ em ∂H e defina*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{H}, \\ -u(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N), & x \notin \overline{H}. \end{cases}$$

Então \tilde{u} é harmônica em \mathbb{R}^N .

Demonstração. A função \tilde{u} é contínua e harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \partial H$. Temos que mostrar que \tilde{u} é harmônica em uma vizinhança de um ponto arbitrário de ∂H . Sejam $x_0 \in \partial H$ e $\delta > 0$ arbitrários. Seja $v \in C(\overline{B_\delta(x_0)})$ a função harmônica em $B_\delta(x_0)$ tal que $v = \tilde{u}$ em $S_\delta(x_0)$. Mostremos que $v = 0$ em $B_\delta(x_0) \cap \partial H$. De fato, pondo $v^\sharp(x) = -v(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N)$, $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$, temos que v^\sharp é harmônica em $B_\delta(x_0)$ e para $x \in S_\delta(x_0)$ temos

$$v^\sharp(x) = -v(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) = -\tilde{u}(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) = \tilde{u}(x) = v(x),$$

logo $v^\sharp = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)}$, i.e., a função v é ímpar em x_N , e portanto $v = 0$ quando $x_N = 0$. Considere $w = \tilde{u} - v$. A função w é harmônica em $B_\delta(x_0) \cap H$, contínua em $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \overline{H}$ e vale zero na fronteira deste conjunto, portanto $\tilde{u} = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \overline{H}$. Analogamente, temos $\tilde{u} = v$ em $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_N \leq 0\}$. \square

6 A desigualdade de Harnack

6.1 TEOREMA. (DESIGUALDADE DE HARNACK) *Seja u uma função harmônica em $B_R(x_0)$ tal que $u \geq 0$ e seja $x \in B_R(x_0)$. Então*

$$\left(\frac{R}{R + |x - x_0|}\right)^{N-2} \frac{R - |x - x_0|}{R + |x - x_0|} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R - |x - x_0|}\right)^{N-2} \frac{R + |x - x_0|}{R - |x - x_0|} u(x_0). \quad (12)$$

Demonstração. Tome $|x - x_0| < \rho < R$. Temos

$$u(x) = \frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \int_{S_\rho(x_0)} \frac{u(y)}{|y - x|^N} d\sigma(y),$$

e $\rho - |x - x_0| \leq |y - x| \leq \rho + |x - x_0|$, para $y \in S_\rho(x_0)$. Como $u \geq 0$, temos

$$\frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \frac{1}{(\rho + |x - x_0|)^N} \int_{S_\rho(x_0)} u(y) d\sigma(y) \leq u(x) \leq \frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \frac{1}{(\rho - |x - x_0|)^N} \int_{S_\rho(x_0)} u(y) d\sigma(y),$$

então basta usar

$$\int_{S_\rho(x_0)} u(y) \, d\sigma(y) = \omega_N \rho^{N-1} u(x_0),$$

simplificar e fazer $\rho \rightarrow R$. □

Nas aplicações, será muito útil a seguinte versão da desigualdade de Harnack

6.2 COROLÁRIO. *Seja u uma função harmônica em $B_R(x_0)$ tal que $u \geq 0$ e seja $0 < r < R$. Então*

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^N u(x') \leq u(x) \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N u(x'), \quad \forall x, x' \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema 6.1, temos

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0),$$

para $x \in \overline{B_r(x_0)}$ já que neste caso $|x - x_0| \leq r$. Agora, se $u = 0$ em $B_R(x_0)$, então a desigualdade é óbvia. Caso contrário, temos $u > 0$ (Corolário 3.4) e basta escrever a desigualdade acima para $u(x')$ e fazer uma divisão. □

6.3 COROLÁRIO. (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA MONÓTONA DE HARNACK) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo e $\{u_n\}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω tal que $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Então ocorre um dos dois casos*

1. *Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\{u_n(x_0)\}$ é limitada. Neste caso, a sequência $\{u_n\}$ converge uniformemente sobre os compactos de Ω (para uma função harmônica);*
2. *Para todo $x \in \Omega$, temos $\lim u_n(x) = \infty$. Neste caso, temos $u_n \rightarrow \infty$ uniformemente sobre os compactos de Ω .*

Demonstração. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) < \infty\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Ω_1 e Ω_2 são abertos. Se $x_1 \in \Omega_1$ tome $r > 0$ tal que $B_r(x_1)$ tem fecho contido em Ω . É uma simples consequência do corolário 6.2 a existência de $C > 0$ tal que

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq C(u_{n+p}(x_1) - u_n(x_1)), \quad \forall x \in \overline{B_r(x_1)}, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Assim $B_r(x_1) \subset \Omega_1$ e $\{u_n\}$ é uniformemente convergente em $B_r(x_1)$. Em particular Ω_1 é aberto. Do mesmo modo, assumindo que $x_2 \in \Omega_2$ se tomarmos $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_2)$ tem fecho contido em Ω então $B_\rho(x_1) \subset \Omega_2$ e $\{u_n\}$ diverge uniformemente para $+\infty$ em $B_\rho(x_2)$. Em particular Ω_2 é também aberto e a tese segue do fato de Ω ser conexo. □

6.4 COROLÁRIO. (TEOREMA DE LIOUVILLE) *Seja u uma função harmônica em \mathbb{R}^N e real. Se $\sup u < \infty$ ou $\inf u > -\infty$, então u é constante. Em outras palavras, se u é harmônica em \mathbb{R}^N então ou u é constante ou a imagem de u é igual a \mathbb{R} .*

Demonstração. Considerando $-u$ se necessário e subtraindo uma constante conveniente podemos assumir $u \geq 0$. Aplicamos o Corolário 6.2, com $x' = 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrário. Tomando $r > |x|$ e fazendo $R \rightarrow \infty$ segue $u(x) = u(0)$. □

O problema de Dirichlet para H consiste em, dada $u_0 \in C(\partial H)$, determinar u harmônica em H , contínua em \bar{H} e satisfazendo $u = u_0$ em ∂H . Este problema não goza de unicidade pois se u é uma solução então $u(x) + x_N$ também será. Teremos unicidade, entretanto, se nos restringirmos ao ambiente das funções limitadas.

6.5 TEOREMA. *Seja u é harmônica em H , contínua em \bar{H} e limitada. Se $u = 0$ em ∂H então u é identicamente nula.*

Demonstração. Pelo teorema 5.9 existe \tilde{u} harmônica em \mathbb{R} coincidindo com u em H ; além do mais, dada a representação explícita de \tilde{u} no teorema 5.9 segue que \tilde{u} é limitada se u o for. Pelo Teorema de Liouville \tilde{u} é constante. Como porém \tilde{u} se anula em ∂H segue que \tilde{u} , e a fortiori u , se anula identicamente. \square

Uma versão, em uma direção um pouco diferente, do Teorema de Liouville pode ser obtida simplesmente usando a propriedade da média volumétrica. Concluiremos nosso texto com este resultado.

6.6 TEOREMA. *Seja u uma função harmônica em \mathbb{R}^N . Suponha que existam constantes $C > 0$ e $\theta \in [0, 1[$ tais que*

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^\theta), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (13)$$

Então u é constante.

Note que este resultado é preciso uma vez que uma função polinomial de grau 1 em \mathbb{R}^N é uma função harmônica que satisfaz (13) com $\theta = 1$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$. Para qualquer $R > 0$, temos

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \frac{N}{R^N \omega_N} \left| \int_{B_R(x)} u(y) \, dy - \int_{B_R(0)} u(y) \, dy \right| \\ &= \frac{N}{R^N \omega_N} \left| \int_{A_1} u(y) \, dy - \int_{A_2} u(y) \, dy \right| \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} A_1 &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y - x| < R \text{ e } |y| > R\}, \\ A_2 &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| < R \text{ e } |y - x| > R\}. \end{aligned}$$

Observe que para $y \in A_1$ temos $R < |y| < R + |x|$ e que para $y \in A_2$ temos $R - |x| < |y| < R$. Portanto

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\leq \frac{N}{R^N \omega_N} \int_{R-|x| \leq |y| \leq R+|x|} |u(y)| \, dy \\ &\leq \frac{CN}{R^N \omega_N} \int_{R-|x| \leq |y| \leq R+|x|} (1 + |y|^\theta) \, dy \\ &= \frac{CN}{R^N} \int_{R-|x| \leq r \leq R+|x|} (1 + r^\theta) r^{N-1} \, dr \\ &= \frac{CN(1 + (R + |x|)^\theta)}{R^N} \int_{R-|x| \leq r \leq R+|x|} r^{N-1} \, dr \\ &= \frac{CN}{R^N} (1 + (R + |x|)^\theta) [(R + |x|)^N - (R - |x|)^N] \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $R \longrightarrow \infty$ uma vez que $(R + |x|)^N - (R - |x|)^N$ é um polinômio de grau $N - 1$. \square

Referências

- **Gerald B. Folland**, “Introduction to Partial Differential Equations” - Preliminary Informal Notes of University Courses and Seminars in Mathematics. Mathematical Notes, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- **Antonio Gilioli**, “Equações Diferenciais Parciais Elípticas” - notas de curso ministrado durante o 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1975.

Exercícios

1. Mostre que se u é harmônica em \mathbb{R}^N e se $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma transformação ortogonal então $u \circ T$ também é harmônica em \mathbb{R}^N . Lembre que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é *ortogonal* se $({}^tT)T = T({}^tT) = I$, a aplicação identidade.
2. Determine todas as funções harmônicas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da forma $u(x) = f(|x|)$, onde $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 .
3. Use o resultado obtido no exercício anterior para obter u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$, onde $0 < r < R < \infty$, contínua em $\bar{\Omega}$ e satisfazendo $u(x) = a$ se $|x| = r$, $u(x) = b$ se $|x| = R$ (aqui $a, b \in \mathbb{R}$).
4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, u harmônica em Ω e $x_0 \in \Omega$. Mostre que se $N \geq 2$ então $u^{-1}\{u(x_0)\}$ é infinito. E quando $N = 1$?
5. Fixado $y \in \mathbb{R}^N$ defina

$$V(x) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^N}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}.$$

Mostre que V é harmônica em $\mathbb{R}^N \setminus \{y\}$.

6. Calcule as integrais

$$\int_{S_1(0)} y_j d\sigma(y), \quad \int_{S_1(0)} y_j y_k d\sigma(y).$$

7. Sejam (x, y) as coordenadas em \mathbb{R}^2 e considere os ODPL com coeficientes constantes:

$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Mostre que

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

8. Sejam $R > 0$ e $f : S_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$\int_{S_R(0)} f(y) d\sigma(y) = R^{N-1} \int_{S_1(0)} f(Rz) d\sigma(z).$$

Sugestão: Mostre, primeiramente, que esta fórmula é válida para $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ escrevendo a expansão de Taylor de f de ordem 1 na origem na forma

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^N g_j(x) x_j, \quad \text{com } g_j \in C^1(\mathbb{R}^N),$$

e aplicando o teorema da divergência para o campo $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$. Conclua o caso geral evocando o teorema de Stone-Weierstrass.

9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e conexo. Seja, também, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $tf(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que toda solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ em } \Omega \\ \partial u / \partial \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

é necessariamente constante (aqui \vec{n} denota a normal unitária exterior a $\partial\Omega$). Determine, também, uma condição adicional sobre f que garanta que toda solução de (*) se anula identicamente.

10. Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N , $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, e seja u uma função harmônica em Ω . Mostre que para cada subconjunto compacto K de Ω vale a desigualdade

$$\sup_{x \in K} |u(x)| \leq \frac{N}{\omega_N \text{dist}(K, \partial\Omega)^N} \int_{\Omega} |u(x)| dx.$$

Conclua o seguinte resultado: se u é harmônica em \mathbb{R}^N e se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então $u = 0$.

11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e com fronteira regular. Seja também $g \in C(\bar{\Omega})$. Mostre que não existe solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ para o problema

$$\begin{cases} (\Delta u)(x) = e^{g(x)}, & x \in \Omega; \\ (\partial u / \partial \vec{n})(y) = 0, & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui \vec{n} é normal a $\partial\Omega$ e exterior a Ω .

12. Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^N e considere uma sequência $\{u_j\}$ de funções harmônicas em Ω , cada uma delas contínua em $\bar{\Omega}$. Suponha que

$$\max_{y \in \partial\Omega} |u_j(y) - u_k(y)| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k}, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

Mostre que $\{u_j\}$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ para uma função $u \in C(\bar{\Omega})$, que é ainda harmônica em Ω .

13. Seja $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Suponha que exista u harmônica em D , contínua em \bar{D} e que coincide com a função $2x_1^2$ em ∂D . Determine $u(0)$.

14. Sejam $U = \{x : x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0\}$ e $f \in C^2(U)$. Defina, para $x \in U$,

$$f_{\sharp}(x) = \int_{S_1(0)} f(|x|\omega) d\sigma(\omega).$$

Mostre que $\Delta(f_{\sharp}) = (\Delta f)_{\sharp}$.

Sugestão: Utilize o teorema da divergência e a fórmula de integração em coordenadas polares.

15. Sejam Ω um aberto regular de \mathbb{R}^2 , com fronteira de classe C^1 , $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $x \in \Omega$ e

$$E(y) = \frac{1}{2\pi} \log |y| \quad y \in \mathbb{R}^2, y \neq 0.$$

Verifique a validade da fórmula

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \vec{n}_y} - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right\} d\sigma(y).$$

16. Proceda formalmente para determinar a função de Green e a fórmula de Poisson para o semi-espaço

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

Conclua que, para $N = 2$, a única solução limitada do problema de Dirichlet para o semi-espaço $x_2 > 0$, com dado de fronteira $v_0 \in C(\partial H) \cap L^\infty(\partial H)$, é dada por

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(x_1 - y)^2 + x_2^2} v_0(y) dy.$$

17. Verifique que a função de Green para a bola $B_1(0)$ em \mathbb{R}^2 é dada por

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log|x - y| - \log[|x|^2|y|^2 + 1 - 2(x \cdot y)]^{1/2} \right\}.$$

18. Sejam Ω um aberto em \mathbb{R}^N e $F \subset \Omega$ tais que F não tem pontos de acumulação em Ω . Mostre que se u é harmônica e limitada em $\Omega \setminus F$ então u se estende a uma função harmônica em Ω .

19. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um compacto de \mathbb{R}^N . Denotando por $E(x)$ o potencial newtoniano em \mathbb{R}^N mostre que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x - y)f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

é de classe C^∞ e que $\Delta u = f$ em \mathbb{R}^N .

20. Seja u harmônica em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$. Mostre que

$$v(y) = u\left(\frac{y_1}{|y|^2}, -\frac{y_2}{|y|^2}\right)$$

é harmônica em $U = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < 1\}$. *Sugestão:* Para simplificar os cálculos defina $g_1 = y_1|y|^{-2}$, $g_2 = -y_2|y|^{-2}$ e mostre que $(g_1)_{y_1} = (g_2)_{y_2}$, $(g_1)_{y_2} = -(g_2)_{y_1}$.

21. Seja Ω como no exercício anterior. Demonstre a unicidade para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = u_0 & \text{em } S_1(0). \end{cases}$$

Aqui assumimos u_0 contínua em $S_1(0)$ e impomos u contínua e limitada em $\bar{\Omega}$.

22. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$. Mostre que $u \in C^\infty(\Omega)$. *Sugestão:* É suficiente mostrar que $u|_B$ é de classe C^∞ para qualquer bola aberta B com fecho contido em Ω . Fixada uma tal bola mostre que existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um compacto de \mathbb{R}^N coincidindo com f em B (cf. as notas de aula da disciplina "Cálculo Integral" mencionadas no texto). Resolva $\Delta v = g$ utilizando o exercício 18 acima.

23. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Suponha que vale a seguinte propriedade:

- dado $x \in \Omega$ existe $\delta = \delta(x) > 0$ tal que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y), \quad 0 < r \leq \delta.$$

Mostre que u é harmônica em Ω .

24. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e conexo e u harmônica em Ω . Mostre que se u se anula em um aberto não vazio de Ω então u se anula identicamente em Ω .

25. Seja Ω um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^N satisfazendo a seguinte propriedade:

$$x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega \implies (x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) \in \Omega.$$

Seja u uma função harmônica em

$$\Omega_+ = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega : x_N > 0\},$$

contínua em

$$\Omega_\bullet = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega : x_N \geq 0\},$$

e nula quando $x_N = 0$. Conclua que existe uma única função \tilde{u} em Ω que coincide com u em Ω_+ .

26. Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \text{ limitada;} \\ u(x_1, 0) = u_0(x_1), x_1 \geq 0; \\ u(0, x_2) = 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

onde u_0 é contínua e limitada em $[0, \infty[$, $u_0(0) = 0$. *Sugestão:* Use o exercício 16.

27. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

(a) $\Delta u(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$

(b) Para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ vale

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ry) d\sigma(y).$$

Sugestão: Para (1) \Rightarrow (2) estude a derivada da função

$$g(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ty) d\sigma(y), \quad 0 \leq t \leq r.$$

Para (2) \Rightarrow (1) escreva a expansão de Taylor de ordem 2 de u em torno de x_0 e utilize o exercício 6.

28. Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^N e $\mathcal{H}(\Omega)$ o espaço constituído pelas funções harmônicas em Ω que pertencem a $L^2(\Omega)$. Mostre que $\mathcal{H}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$.

29. Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N e $\mathcal{A} \subset C^\infty(\Omega)$ uma família de funções harmônicas satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $C > 0$ tal que $\sup_K |u| \leq C$, $\forall u \in \mathcal{A}$. Mostre que a mesma propriedade é válida para as famílias

$$\mathcal{A}_j \doteq \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} : u \in \mathcal{A} \right\}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Conclua, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli, que para todo $K \subset \Omega$ compacto, o conjunto $\{u|_K : u \in \mathcal{A}\} \subset C(K)$ é relativamente compacto em $C(K)$. Aqui, como é usual, estamos munindo $C(K)$ com a distância $d(f, g) = \sup_K |f - g|$.

----- oooo -----