

**MAP0413 - 1o. semestre de 2018**

**FUNÇÕES HARMÔNICAS**

**Notas de Antonio Victor da Silva Junior e**

**Paulo D. Cordaro**

**1a. versão - maio de 2018**

# 1 Preliminares - O problema de Dirichlet

Denotaremos por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$$

o operador de Laplace (ou laplaciano) em  $\mathbb{R}^N$ .

1.1 DEFINIÇÃO. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto. Uma função  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  é dita *harmônica em  $\Omega$*  se  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

Note que se  $u$  é a valores complexos então  $u$  é harmônica se, e somente se,  $\operatorname{Re} u$  e  $\operatorname{Im} u$  são harmônicas; isto se deve ao fato de  $\Delta$  ser um operador com coeficientes reais. Assim, para o estudo das propriedades das funções harmônicas podemos nos restringir ao caso em que as funções são a valores reais.

1.2 EXEMPLO. São exemplos de funções harmônicas

1. Seja  $\Omega = \mathbb{R}^N$  e  $u(x) = a + \langle x, b \rangle$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}^N$ ;
2. Seja  $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa então  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$  são harmônicas;
3. Seja  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Se  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N$  satisfaz  $\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_N^2 = 0$ , então  $u(x) = \operatorname{Re} e^{\langle x, \zeta \rangle}$  e  $v(x) = \operatorname{Im} e^{\langle x, \zeta \rangle}$  são harmônicas.

1.3 TEOREMA. *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto limitado e  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ .*

1. Se  $\Delta u \geq 0$ , então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

2. Se  $\Delta u \leq 0$ , então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.4 COROLÁRIO. (*Princípio do máximo, forma fraca*) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto limitado e  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  harmônica em  $\Omega$ . Então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.5 OBSERVAÇÃO. Se  $u$  é harmônica e se  $|u(x)| \leq M$  para  $x \in \partial\Omega$  segue do Corolário 1.4 que  $|u(x)| \leq M$  para  $x \in \Omega$ . Em particular, se  $u \equiv 0$  em  $\partial\Omega$ , então  $u \equiv 0$  em  $\overline{\Omega}$ .

*Demonstração do Teorema 1.3.* Mostraremos (1.), a demonstração de (2.) é análoga. Consideremos

$$m = \max_{\partial\Omega} u,$$

$$M = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Suponha, por absurdo, que  $m < M$ . Então existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = M$  e, ademais, vale  $\nabla u(x_0) = 0$  e  $\Delta u(x_0) \leq 0$ . Seja  $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  a função dada por

$$v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2,$$

em que  $\varepsilon > 0$  é um número que determinaremos a seguir. Temos  $v(x_0) = M$ , e para  $x \in \partial\Omega$ , vale  $v(x) \leq m + \varepsilon\delta(\Omega)^2$ , em que  $\delta(\Omega)$  é o *diâmetro* de  $\Omega$ . Logo, se escolhermos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < (M - m)/\delta(\Omega)^2$ , teremos  $v(x) < M$ . Tal escolha implica que existe  $x_1 \in \Omega$  um ponto no qual a função  $v$  assume seu valor máximo. Mas  $\Delta v(x_1) = \Delta u(x_1) + 2N\varepsilon \geq 2N\varepsilon > 0$ , uma contradição.  $\square$

O problema de Dirichlet para  $\Omega$  consiste em, dada  $u_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, determinar  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = u_0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

1.6 DEFINIÇÃO. Um subconjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é dito um *aberto de Dirichlet* se o problema de Dirichlet tiver solução para toda  $u_0$ .

Note que o problema de Dirichlet admite no máximo uma solução, uma consequência do resultado enunciado na observação 1.5.

1.7 DIGRESSÃO. Sejam  $\Omega$  um aberto de Dirichlet e  $x \in \Omega$ . O funcional

$$T : \mathcal{C}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada  $u_0 \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$  o valor  $u(x)$ , em que  $u$  é a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira  $u_0$ , está bem definido, é contínuo, pois  $|T(u_0)| \leq \max |u_0|$ , e é positivo. Pelo teorema de Riesz, existe uma medida de Borel regular  $\mu_x$  sobre  $\partial\Omega$  tal que

$$u(x) = T(u_0) = \int_{\partial\Omega} u_0(y) d\mu_x(y),$$

e portanto a função  $u$  é reconstituída através de integração de seu valor de fronteira com relação a medidas apropriadas.

## 2 Identidades de Green

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um *aberto com fronteira regular* como definido nas notas de aula da disciplina “Cálculo Integral”, página 66, em

[www.ime.usp.br/~cordaro/calculo-integral-2o-semester-de-2017](http://www.ime.usp.br/~cordaro/calculo-integral-2o-semester-de-2017)

Sejam  $\vec{n}$  o campo unitário normal a  $\partial\Omega$  e  $d\sigma$  a medida de superfície definida em  $\partial\Omega$ . Nas notas de aula mencionadas acima encontra-se a demonstração do *teorema da divergência* se  $\vec{X}$  é um campo vetorial com coeficientes em  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  vale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{X}(y), \vec{n}(y) \rangle d\sigma(y). \quad (1)$$

Sejam  $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ . Aplicando o teorema da divergência para  $\vec{X} = v\nabla u$  obtemos a *primeira identidade de Green*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma. \quad (2)$$

Trocando  $u$  por  $v$  e subtraindo as identidades obtemos a *segunda identidade de Green*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma. \quad (3)$$

Como consequência da primeira identidade de Green temos a seguinte proposição

2.1 PROPOSIÇÃO. *Seja  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  uma função harmônica em  $\Omega$ .*

1. *Se  $\partial u / \partial \vec{n} = 0$  em  $\partial\Omega$ , então  $u$  é localmente constante em  $\Omega$ ;*
2. *Vale a seguinte identidade*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = 0.$$

*Demonstração.* Ambos os itens seguem da primeira identidade de Green (2) para (1.) tome  $u = v$  e para (2.) tome  $v = 1$ . □

### 3 A propriedade da média

Denotaremos a esfera de raio  $R > 0$  e centrada em  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  por  $S_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| = R\}$  e a bola aberta de raio  $R > 0$  e centrada em  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  por  $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < R\}$ . Note que  $B_R(x_0)$  é um aberto com fronteira regular. A passagem a coordenadas polares em  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  é feita com as identidades

$$\begin{cases} x = ry, & r = |x|, \quad |y| = 1, \\ dx = r^{N-1} dr d\sigma(y), \end{cases}$$

em que  $d\sigma$  é a medida de superfície em  $S_1(0)$ . Denotaremos a medida da esfera unitária em  $\mathbb{R}^N$  por

$$\omega_N = |S_1(0)| = \int_{S_1(0)} d\sigma.$$

Nosso objetivo agora é calcular  $\omega_N$  e para isso introduzimos a função gama

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Um simples cálculo<sup>1</sup> mostra que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Ademais  $\Gamma(1) = 1$ , logo temos  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , para  $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ . Da identidade

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds,$$

segue que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Agora

$$\begin{aligned} \pi^{N/2} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx \\ &= \int_0^\infty \int_{S_1(0)} e^{-r^2} r^{N-1} d\sigma(y) dr \\ &= \omega_N \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr \\ &= \frac{\omega_N}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{N-2}{2}} ds \\ &= \frac{\omega_N}{2} \Gamma(N/2), \end{aligned}$$

logo

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Assim, para  $N = 2k$  temos  $\Gamma(N/2) = (k-1)!$  e portanto

$$\omega_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}.$$

Por outro lado, para  $N = 2k+1$  temos

$$\Gamma(N/2) = \Gamma(k+1/2) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \Gamma(1/2) \prod_{l=1}^k \left(k - \frac{2l-1}{2}\right),$$

portanto

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k-1)(2k-3) \cdots 1}.$$

---

<sup>1</sup>use  $\frac{d}{dt} t^x = x t^{x-1}$  e integre por partes.

Podemos também calcular o volume da bola

$$\begin{aligned}
|B_R(x_0)| &= |B_R(0)| \\
&= \int_{B_R(0)} dx \\
&= \int_0^R \int_{S_1(0)} r^{N-1} d\sigma(y) dr \\
&= \frac{R^N \omega_N}{N}.
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência (1), temos a identidade

$$N|B_R(0)| = \int_{S_R(0)} \langle y, y/R \rangle d\sigma(y) = R|S_R(0)|,$$

que implica  $|S_R(x_0)| = \omega_N R^{N-1}$ . Por fim, faremos uso constante do seguinte fato

$$\int_{S_R(0)} f(y) d\sigma(y) = R^{N-1} \int_{S_1(0)} f(Rz) d\sigma(z), \quad f \in \mathcal{C}(S_R(0)). \quad (4)$$

Para a demonstração da fórmula acima veja o exercício 8.

**3.1 TEOREMA.** (A PROPRIEDADE DA MÉDIA PARA FUNÇÕES HARMÔNICAS) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto e  $u$  uma função harmônica em  $\Omega$ . Se  $B_R(x_0)$  tem fecho contido em  $\Omega$  então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R(x_0)|} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y).$$

**3.2 OBSERVAÇÃO.** Aplicando (4) no Teorema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(0)} u(x_0 + y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + Rz) d\sigma(z).
\end{aligned}$$

*Demonstração (do Teorema 3.1).* Definimos

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x - x_0|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ -\log|x - x_0|, & N = 2. \end{cases}$$

Um cálculo direto mostra que  $v$  é harmônica em  $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$ . Faremos a demonstração para o caso  $N \geq 3$ , o caso  $N = 2$  tem demonstração análoga. Para  $0 < \varepsilon < R$ , seja  $U_\varepsilon = B_R(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ . Aplicando a segunda identidade de Green (3), temos

$$\int_{\partial U_\varepsilon} \left( u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) - v(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right) d\sigma(y) = 0.$$

Como  $v$  é constante em cada componente de  $\partial U_\varepsilon = S_R(x_0) \cup S_\varepsilon(x_0)$ , podemos aplicar a Proposição 2.1 e concluir

$$\int_{S_R(x_0)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) d\sigma(y) = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) d\sigma(y).$$

Para  $y \in S_R(x_0)$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \bar{n}}(y) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial y_j}(y) \frac{y_j - x_{0j}}{R} \\ &= \sum_{j=1}^N (2-N) |y - x_0|^{1-N} \frac{(y_j - x_{0j})^2}{|y - x_0| R} \\ &= (2-N) R^{1-N},\end{aligned}$$

logo

$$(2-N) R^{1-N} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) = (2-N) \varepsilon^{1-N} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y),$$

e portanto

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y) \rightarrow u(x_0),$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pois  $u$  é contínua em  $x_0$ . De fato, para formalizar esta última afirmação seja  $\eta > 0$  arbitrário e tomemos  $\delta > 0$  tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |u(x) - u(x_0)| < \eta.$$

Certamente podemos escrever esta propriedade assumindo que a bola de centro  $x_0$  e raio  $\delta > 0$  está contida em  $\Omega$ . Logo, se  $0 < \varepsilon < \delta$ ,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y) - u(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u(y) d\sigma(y) - u(x_0) \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} |u(y) - u(x_0)| d\sigma(y) \leq \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x_0)} \eta d\sigma(y) = \eta,\end{aligned}$$

o que demonstra nossa afirmação.  $\square$

**3.3 COROLÁRIO.** (A PROPRIEDADE DA MÉDIA VOLUMÉTRICA) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto e  $u$  uma função harmônica em  $\Omega$ . Se  $B_R(x_0)$  tem fecho contido em  $\Omega$  então*

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx.$$

*Demonstração.* Para  $0 \leq \rho \leq R$ , temos

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y) d\sigma(y),$$

logo

$$\int_0^R \rho^{N-1} u(x_0) d\rho = \frac{1}{\omega_N} \int_0^R \int_{S_1(0)} u(x_0 + \rho y) \rho^{N-1} d\sigma(y) d\rho,$$

e portanto

$$u(x_0) = \frac{N}{R^N \omega_N} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx.$$

$\square$

**3.4 COROLÁRIO.** (Princípio do máximo, forma forte) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto e conexo. Seja  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  real e harmônica. Suponha que  $\sup u = a < \infty$ . Se existir  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = a$ , então  $u = a$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Por hipótese o conjunto

$$A = \{x \in \Omega : u(x) = a\}$$

é não vazio. Como  $A$  é claramente fechado em  $\Omega$  (por que?) e também como  $\Omega$  é conexo, bastará mostrar que  $A$  é aberto em  $\Omega$ . Seja então  $x_* \in A$  e tomemos uma bola  $B_r(x_*)$  com fecho contido em  $\Omega$ . Como  $a = \sup u$  temos, pela propriedade da média volumétrica

$$\frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_r(x_*)} \underbrace{\{a - u(x)\}}_{\geq 0} dx = 0,$$

de onde concluímos que  $u(x) = a$  para  $x \in B_r(x_*)$ . A demonstração está completa.  $\square$

Nosso objetivo agora é provar a recíproca do Teorema 3.1

**3.5 TEOREMA.** *Seja  $u \in \mathcal{C}(\Omega)$  e suponha que para cada  $x_0 \in \Omega$  temos*

$$u(x_0) = \frac{1}{R^{N-1}\omega_N} \int_{S_R(x_0)} u(y) d\sigma(y),$$

*sempre que  $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$  (distância de  $x_0$  a  $\partial\Omega$ ). Então  $u \in C^\infty(\Omega)$  e é uma função harmônica em  $\Omega$ .*

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 3.5, precisamos desenvolver algumas ferramentas

**3.6 DIGRESSÃO. (FUNÇÕES TESTE)** A função

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$ , logo a função  $g(t) = h(1-t)h(1+t)$  é de classe  $C^\infty$ , se anula fora do intervalo  $[-1, 1]$  e vale  $g(0) > 0$ . Para  $x \in \mathbb{R}^N$ , definimos

$$\varphi(x) = Ag(|x|^2), \quad \text{com } A = \left( \int_{\mathbb{R}^N} g(|y|^2) dy \right)^{-1},$$

logo  $\varphi$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^N$ , se anula fora de  $B_1(0)$ , vale  $\int \varphi = 1$  e  $\varphi$  é *radial*, ou seja, o valor  $\varphi(x)$  só depende de  $|x|$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , definimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

de modo que  $\varphi_\varepsilon$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^N$ , se anula fora de  $B_\varepsilon(0)$ , vale  $\int \varphi_\varepsilon = 1$  e  $\varphi_\varepsilon$  é radial.

*Demonstração (do Teorema 3.5)* Para cada  $\varepsilon > 0$ , considere o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

A função dada por

$$\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto \varphi_\varepsilon(x - y) \in \mathbb{R}$$

é de classe  $C^\infty$  e para cada  $x \in \Omega_\varepsilon$  fixado, a correspondente função em  $y \in \mathbb{R}^N$  se anula no complementar de um subconjunto compacto de  $\Omega$ . Logo, verifica-se que a função

$$U_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x - y)u(y) dy,$$

é de classe  $C^\infty$  em  $\Omega_\varepsilon$  (derivação sob o sinal de integração). Mostraremos abaixo que para  $x \in \Omega_\varepsilon$ , tem-se  $U_\varepsilon(x) = u(x)$ , o que pela arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$  permite concluir que  $u$  é de classe  $C^\infty$ . De fato

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy \\
&= \int_{B_1(0)} u(x - \varepsilon y) \varphi(y) \, dy \\
&= \int_{S_1(0)} \int_0^1 u(x - \varepsilon r \dot{y}) \varphi(r \dot{y}) r^{N-1} \, dr \, d\sigma(\dot{y}) \\
&= A \int_0^1 r^{N-1} g(r^2) \underbrace{\left( \int_{S_1(0)} u(x - \varepsilon r \dot{y}) \, d\sigma(\dot{y}) \right)}_{=\omega_N u(x)} \, dr \\
&= Au(x) \int_{B_1(0)} g(|x|^2) \, dx \\
&= u(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que a função  $u$  é harmônica e para isto faremos uso do seguinte lema:

**3.7 LEMA.** *Sejam  $v \in C^2(\Omega)$ ,  $x_0 \in \Omega$  e para  $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$  defina a função*

$$\lambda(r) = \int_{S_1(0)} v(x_0 + ry) \, d\sigma(y).$$

Então

$$\lambda'(r) = r^{N-1} \int_{S_r(x_0)} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(z) \, d\sigma(z).$$

Assumindo a validade do lema por um momento vamos concluir a demonstração do teorema. Aplicando o Lema 3.7 com  $u$  substituindo  $v$  e observando que então  $\lambda$  é constante seguirá que

$$\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\sigma(y) = \int_{B_r(x_0)} \Delta u \, dx,$$

quaisquer que sejam  $x_0 \in \Omega$  e  $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$ . Assim  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$  e portanto resta agora demonstrar o Lema 3.7.

*Demonstração.* (do Lema 3.7) Um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned}
\lambda'(r) &= \int_{S_1(0)} \langle \nabla v(x_0 + ry), y \rangle \, d\sigma(y) \\
&= r^{N-1} \int_{S_r(0)} \langle \nabla v(x_0 + z), z/r \rangle \, d\sigma(z) \\
&= r^{N-1} \int_{S_r(x_0)} \langle \nabla v(y), (y - x_0)/r \rangle \, d\sigma(y),
\end{aligned}$$

de onde segue a conclusão. □

**3.8 COROLÁRIO.** *Toda função harmônica é de classe  $C^\infty$ .*

**3.9 COROLÁRIO.** *Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência de funções harmônicas em  $\Omega$ . Se  $u_n \rightarrow u$  uniformemente sobre os compactos de  $\Omega$ , então  $u$  é uma função harmônica.*

*Demonstração.* A função  $u$  é contínua pois é limite uniforme sobre os compactos de  $\Omega$  de uma sequência de funções contínuas. Para provar que  $u$  é harmônica basta então mostrar que  $u$  satisfaz a propriedade da média. Seja então  $B_R(x_0)$  uma bola com fecho contido em  $\Omega$ . Como cada  $u_n$  é harmônica temos

$$u_n(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x_0)} u_n(y) d\sigma(y), \quad 0 < r \leq R.$$

Passando ao limite estas igualdades quando  $n \rightarrow \infty$  segue a propriedade desejada, uma vez que a convergência uniforme sobre os compactos de  $\Omega$  da sequência  $\{u_n\}$  implica

$$\frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x_0)} u_n(y) d\sigma(y) \longrightarrow \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x_0)} u(y) d\sigma(y).$$

□

**3.10 COROLÁRIO.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto e limitado. Suponha que o problema de Dirichlet para  $\Omega$  possui solução sempre que o valor na fronteira for a restrição de um polinômio em  $\mathbb{R}^N$ . Então  $\Omega$  é um aberto de Dirichlet.*

*Demonstração.* Seja  $u_0 \in C(\partial\Omega)$ . Pelo teorema de Stone-Weierstrass existe uma sequência  $\{p_n\}$  de polinômios em  $\mathbb{R}^N$  tal que  $p_n \rightarrow u_0$  uniformemente em  $\partial\Omega$ . Para cada  $n$  existe  $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  harmônica em  $\Omega$  satisfazendo  $u_n = p_n$  em  $\partial\Omega$ . Pelo Corolário 1.4

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |u_m - u_n| = \max_{\partial\Omega} |p_m - p_n| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Pelo critério de Cauchy para convergência uniforme, existe  $u \in C(\bar{\Omega})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente em  $\Omega$ . Em particular  $u = u_0$  em  $\partial\Omega$ . Finalmente, pelo corolário anterior  $u$  é harmônica, e portanto de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ . □

Vimos que toda solução de classe  $C^2$  da equação  $\Delta u = 0$  é automaticamente de classe  $C^\infty$ . Na realidade podemos dizer mais toda função harmônica é de fato real-analítica. Lembremos que se  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é aberto e se  $f \in C^\infty(\Omega)$  então  $f$  é *real-analítica* se para cada ponto  $x_0 \in \Omega$  a série de Taylor de  $f$  centrada em  $x_0$  converge para  $f$ , uniforme e absolutamente, em uma vizinhança de  $x_0$ . Uma propriedade equivalente é a seguinte  $f \in C^\infty(\Omega)$  é real-analítica se, e somente se, para toda bola fechada  $B$  contida em  $\Omega$  existem constantes  $C > 0$  e  $h > 0$  tais que

$$\sup_B |\partial^\alpha u| \leq Ch^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \quad (5)$$

Para uma demonstração consultar o texto "analíticas" em

[www.ime.usp.br/~cordaro/analise-real-1o-semester-de-2017](http://www.ime.usp.br/~cordaro/analise-real-1o-semester-de-2017).

**3.11 TEOREMA.** *Toda função harmônica  $u$  em um aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  é real-analítica em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Como  $u$  é de classe  $C^\infty$  é fácil então ver que  $\partial^\alpha u$  também é harmônica, qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ . Sejam  $x_0 \in \Omega$  e  $R > 0$  tal que  $B_R(x_0)$  tem fecho contido em  $\Omega$ . Se  $j \in \{1, \dots, N\}$  aplicando a propriedade da média volumétrica para  $\partial u / \partial x_j$  obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx.$$

Seja  $\vec{X}(x) = (0, \dots, 0, u(x), 0, \dots, 0)$ , onde  $u(x)$  aparece na  $j$ -ésima posição. Então  $\text{div } \vec{X}(x) = (\partial u / \partial x_j)(x)$  e portanto, pelo teorema da divergência,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{S_r(x_0)} \langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle d\sigma(y).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{R} \sup_{S_R(x_0)} |u|.$$

Sejam  $B \subset B' \subset \Omega$  bolas fechadas com raios  $r$  e  $r'$  respectivamente,  $r < r'$ . Aplicando a desigualdade precedente para um ponto arbitrário  $x_0 \in B$  e  $R = r' - r$  obtemos

$$\sup_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq \frac{N}{r' - r} \sup_{B'} |u|, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Estamos agora em posição para concluir a demonstração do teorema. Fixemos  $B_r(x_*)$  uma bola com fecho contido em  $\Omega$  e seja  $d > 0$  tal que a bola  $B_{r+d}(x_*)$  também tenha fecho contido em  $\Omega$ . Seja  $\alpha$  um multi-índice e aplique (6) iteradamente, para as bolas  $B \doteq B_{r+(i-1)d/|\alpha|}(x_*) \subset B' \doteq B_{r+id/|\alpha|}(x_*)$ ,  $i = 1, \dots, |\alpha|$ . Obtemos

$$\sup_{B_r(x_*)} |D^\alpha u| \leq \frac{N^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}}{d^{|\alpha|}} \sup_{B_{r+d}(x_*)} |u|.$$

Uma vez que  $n^n < e^n n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  provamos que  $u$  satisfaz (5) e portanto  $u$  é real-analítica em  $\Omega$ . A demonstração está completa.  $\square$

## 4 Potencial newtoniano

O *potencial newtoniano* é dado pela expressão

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(N-2)\omega_N|x|^{N-2}}, & N \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log|x|, & N = 2. \end{cases}$$

Demonstra-se que  $E$  é uma função harmônica em  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  e pertence a  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ . Para esta última informação basta mostrar que  $E$  é integrável em  $B_1(0)$  e isto segue facilmente se escrevermos a integral de  $-E(x)$  sobre  $B_1(0)$  em coordenadas polares.

4.1 TEOREMA. (TERCEIRA IDENTIDADE DE GREEN) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto com fronteira regular. Seja  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Para todo  $x \in \Omega$  vale*

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_y}(x-y) - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right) d\sigma(y).$$

*Demonstração.* Fixe  $x \in \Omega$ . Para  $0 < \varepsilon < d(x, \partial\Omega)$ , seja  $U_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ . Temos

$$\begin{aligned} \int_{U_\varepsilon} E(x-y)\Delta u(y) \, dy = \\ \int_{\partial\Omega} \left( E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_y}(x-y) \right) d\sigma(y) \\ - \int_{S_\varepsilon(x)} \left( E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(x-y) \right) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Usando  $\nabla E(x) = x/(\omega_N|x|^N)$  qualquer que seja  $N \geq 2$ , podemos passar ao limite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_\varepsilon} E(x-y) \Delta u(y) \, dy &= \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) \, dy, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x)} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(y) \, d\sigma(y) &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_\varepsilon}(x-y) \, d\sigma(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(y) \, d\sigma(y) = u(x), \end{aligned}$$

e segue a tese.  $\square$

**4.2 COROLÁRIO.** *Seja  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$  uma função com suporte compacto, ou seja, que se anule no complementar de um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ . Então*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y) \Delta u(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

## 5 Função de Green

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto e suponha que para cada  $x \in \Omega$  o seguinte problema de Dirichlet tenha solução

$$\begin{cases} \Delta v_x = 0, & \text{em } \Omega, \\ v_x = E(x - \cdot), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

com  $v_x \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ . A *função de Green* para  $\Omega$  é dada por

$$G(x, y) = E(x-y) - v_x(y), \quad (x, y) \in (\Omega \times \overline{\Omega}) \setminus \{(z, z) \mid z \in \Omega\}.$$

Como função de  $y$ , a função  $G(x, \cdot)$  é harmônica para  $y \neq x$  e  $G(x, \cdot) = 0$  em  $\partial\Omega$ .

Suponha agora que  $\Omega$  seja um aberto com fronteira regular e seja  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ . Aplicando o Teorema 4.1 (terceira identidade de Green), temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\Omega} v_x(y) \Delta u(y) \, dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) + u(y) \frac{\partial v_x}{\partial \vec{n}_y}(y) - v_x(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y}(y) \right) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Por outro lado, a segunda identidade de Green (3) nos dá

$$\int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial v_x}{\partial \vec{n}_y}(y) - v_x(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_y}(y) \right) d\sigma(y) = - \int_{\Omega} v_x(y) \Delta u(y) \, dy.$$

Portanto, temos a seguinte identidade (denominada *fórmula de Poisson*)

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) \, d\sigma(y).$$

Em suma, temos o seguinte teorema

**5.1 TEOREMA.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto com fronteira regular. Se  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = u_0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que  $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  e  $u_0 \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ , então

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) d\sigma(y).$$

5.2 EXEMPLO. (FUNÇÃO DE GREEN PARA A BOLA UNITÁRIA) Consideremos  $\Omega = B_1(0)$ , com  $N \geq 3$ . Ou seja, temos

$$E(x - y) = \frac{1}{\omega_N(2 - N)} |x - y|^{2-N}, \quad x \neq y.$$

Seja  $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ . A função dada por  $v_x(y) = |x|^{2-N} E(x^* - y)$  é harmônica em  $B_1(0)$  quando  $x^* \notin \overline{B_1(0)}$ . Tomemos  $x^*$  o simétrico de  $x$  com relação a  $S_1(0)$ , ou seja, temos  $x^* = x/|x|^2$ . A propriedade fundamental de  $x^*$  é

$$|x - y| = |x| |x^* - y|, \quad \text{para } |y| = 1.$$

De fato

$$\langle x^* - y, x^* - y \rangle = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2}{|x|^2} \langle x, y \rangle + |y|^2,$$

logo

$$|x|^2 |x^* - y|^2 = 1 - 2 \langle x, y \rangle + |x|^2 = |x - y|^2.$$

Portanto temos  $v_x(y) = E(x - y)$  se  $|y| = 1$  para  $x \neq 0$ . Quando  $x = 0$ , temos  $E(0 - y) = 1/(\omega_N(2 - N))$  para  $|y| = 1$ , logo podemos tomar  $v_0(y) = 1/(\omega_N(2 - N))$ ,  $\forall y \in \overline{B_1(0)}$ .

Conclusão Para cada  $x \in \Omega = B_1(0)$ , resolvemos o problema de Dirichlet (7), portanto a função de Green para  $B_1(0)$  é dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} E(x - y) - |x|^{2-N} E(x^* - y), & x \neq 0, \\ E(y) - \frac{1}{\omega_N(2 - N)}, & x = 0, \end{cases} \quad (8)$$

em que  $x^* = x/|x|^2$ .

5.3 OBSERVAÇÃO. Um raciocínio análogo ao do Exemplo 5.2 permite concluir que a função de Green para  $B_1(0)$  quando  $N = 2$  é

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| - \frac{1}{2\pi} \log |x| |x^* - y|, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi} \log |y|, & x = 0, \end{cases} \quad (9)$$

em que  $x^* = x/|x|^2$ .

5.4 EXEMPLO. (NÚCLEO DE POISSON PARA A BOLA UNITÁRIA) Dando continuidade ao estudado no Exemplo 5.2, temos para  $x \neq 0$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) = \frac{1}{\omega_N} \left\langle -\frac{x - y}{|x - y|^N} + \frac{|x|^{2-N}(x^* - y)}{|x^* - y|^N}, y \right\rangle,$$

e usando o fato

$$\frac{|x|^{-N}}{|x^* - y|^N} = \frac{1}{|x - y|^N},$$

segue

$$K(x, y) = \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_y}(x, y) = \frac{1}{\omega_N |x - y|^N} \langle y - x + x - |x|^2 y, y \rangle = \frac{1 - |x|^2}{\omega_N |x - y|^N} \quad (10)$$

É um exercício verificar que a fórmula (10) também vale quando  $N = 2$ . A função  $K$  definida pela fórmula (10) é denominada *núcleo de Poisson para  $B_1(0)$* . O núcleo de Poisson possui as seguintes propriedades (exercício)

1. Quaisquer que sejam  $x \in B_1(0)$  e  $y \in S_1(0)$ , temos  $K(x, y) > 0$ ;

2. Para todo  $x \in B_1(0)$ , vale

$$\int_{S_1(0)} K(x, y) d\sigma(y) = 1;$$

3. Quaisquer que sejam  $x \in B_1(0)$  e  $y \in S_1(0)$ , temos  $\Delta_x K(x, y) = 0$  (exercício 5);

4. Se  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$  e  $\Delta u = 0$  em  $B_1(0)$ , então

$$u(x) = \int_{S_1(0)} K(x, y)u(y) d\sigma(y), \quad x \in B_1(0).$$

5.5 TEOREMA. (SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A BOLA UNITÁRIA) *Seja  $u_0 \in C(S_1(0))$ . A função dada por*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{S_1(0)} K(x, y)u_0(y) d\sigma(y), & x \in B_1(0), \\ u_0(x), & x \in S_1(0), \end{cases}$$

*é harmônica em  $B_1(0)$  e contínua em  $\overline{B_1(0)}$ .*

*Demonstração.* Derivando sob o sinal de integração, a propriedade (3.) do núcleo de Poisson implica que  $u$  é harmônica em  $B_1(0)$ . Só precisamos então mostrar que  $u$  é contínua em  $y_0 \in S_1(0)$ , arbitrário. Ou seja, temos que mostrar

$$\lim_{B_1(0) \ni x \rightarrow y_0} \int_{S_1(0)} K(x, y)u_0(y) d\sigma(y) = u_0(y_0). \quad (11)$$

Aplicando a propriedade (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$\int_{S_1(0)} K(x, y)u_0(y) d\sigma(y) - u_0(y_0) = \int_{S_1(0)} K(x, y)(u_0(y) - u_0(y_0)) d\sigma(y).$$

Escrevamos esta última integral como  $I_1 + I_2$  em que

$$I_1 = \int_{V_0} K(x, y)(u_0(y) - u_0(y_0)) d\sigma(y),$$

$$I_2 = \int_{S_1(0) \setminus V_0} K(x, y)(u_0(y) - u_0(y_0)) d\sigma(y),$$

e  $V_0$  é uma vizinhança de  $y_0$  em  $S_1(0)$  que escolheremos a seguir. Seja  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $V_0$  tal que se  $y \in V_0$ , então  $|u_0(y) - u_0(y_0)| < \varepsilon/2$ . Aplicando as propriedades (1.) e (2.) do núcleo de Poisson, temos

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_1(0)} K(x, y) d\sigma(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para a outra parcela, temos

$$|I_2| \leq 2 \sup |u_0| \int_{S_1(0) \setminus V_0} K(x, y) d\sigma(y),$$

mas

$$\lim_{B_1(0) \ni x \rightarrow y_0} \int_{S_1(0) \setminus V_0} K(x, y) d\sigma(y) = 0,$$

uma vez que para  $x$  próximo de  $y_0$  o denominador em (10) será limitado inferiormente e o numerador em (10) tenderá a zero. Portanto, existe  $\delta > 0$  tal que  $|I_2| \leq \varepsilon/2$  se  $x \in B_1(0) \cap B_\delta(y_0)$ .  $\square$

5.6 OBSERVAÇÃO. Seja  $u_0 \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$ . Então a função

$$S_1(0) \ni y \mapsto u_0(x_0 + Ry) \in \mathbb{C},$$

é contínua em  $S_1(0)$ . Seja  $U \in \mathcal{C}(\overline{B_1(0)})$  harmônica em  $B_1(0)$  tal que  $U(y) = u_0(x_0 + Ry)$  para  $y \in S_1(0)$ . Defina  $u(x) = U((x - x_0)/R)$ ,  $x \in B_R(x_0)$ . Então  $u$  é harmônica em  $B_R(x_0)$ , contínua em  $\overline{B_R(x_0)}$  e coincide com  $u_0$  em  $S_R(x_0)$ . Se  $x \in B_R(x_0)$ , temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{S_1(0)} K\left(\frac{x - x_0}{R}, y\right) u_0(x_0 + Ry) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(0)} K\left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{z}{R}\right) u_0(x_0 + z) d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{R^{N-1}} \int_{S_R(x_0)} K\left(\frac{x - x_0}{R}, \frac{y - x_0}{R}\right) u_0(y) d\sigma(y) \\ &= \int_{S_R(x_0)} K_{R,x_0}(x, y) u_0(y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

em que

$$K_{R,x_0}(x, y) = \frac{1}{\omega_N R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^N}.$$

A função  $K_{R,x_0}$  é denominada *núcleo de Poisson para  $B_R(x_0)$* .

A seguir, apresentaremos algumas consequências do Teorema 5.5.

5.7 TEOREMA. (SINGULARIDADES REMOVÍVEIS) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto aberto e seja  $x_0 \in \Omega$ . Se  $u$  é uma função harmônica em  $\Omega \setminus \{x_0\}$  tal que*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{E(x - x_0)} = 0,$$

*então existe  $\tilde{u}$  harmônica em  $\Omega$  tal que  $\tilde{u} = u$  em  $\Omega \setminus \{x_0\}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $N \geq 3$  (a demonstração para  $N = 2$  é análoga). Podemos supor que  $u$  é uma função real. Seja  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x_0) \Subset \Omega$ . Seja  $v$  a função harmônica em  $B_\delta(x_0)$  tal que  $v = u$  em  $S_\delta(x_0)$ . Seja  $w = u - v$  em  $\overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}$  (note que  $w$  é real e é harmônica em  $B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ ). É suficiente mostrar  $w = 0$ . A hipótese sobre  $u$  garante a validade do seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}} = 0.$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $0 < r < \delta$  tal que

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \quad \forall x \in \overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Observe que a função  $x \mapsto \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$  é positiva e harmônica em  $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$ , vale zero em  $S_\delta(x_0)$  e é limitante superior de  $|w(x)|$  em  $S_r(x_0)$ . Aplicando o Corolário 1.4 (princípio do máximo) para  $\pm w(x) - \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N})$  em  $B_\delta(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$ , podemos concluir

$$|w(x)| \leq \varepsilon(|x - x_0|^{2-N} - \delta^{2-N}), \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue que  $w = 0$ . □

5.8 EXEMPLO. (ZAREMBA) Seja  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$ . E considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } S_1(0), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Suponha que o problema acima admita uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Como  $u$  é limitada em  $\Omega$ , podemos aplicar o Teorema 5.7 (singularidades removíveis) e concluir que  $u$  é harmônica em  $B_1(0)$ . Logo, pelo Corolário 1.4 (princípio do máximo), temos  $u = 0$  em  $\overline{B_1(0)}$ , uma contradição. Portanto, o problema de Dirichlet acima não admite solução em  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

Para o que segue, denotaremos

$$H = \{x \in \mathbb{R}^N : x = (x_1, \dots, x_N), x_N > 0\}.$$

5.9 TEOREMA. (PRINCÍPIO DA REFLEXÃO DE SCHWARZ) *Seja  $u \in C(\overline{H})$  uma função harmônica em  $H$ . Suponha que  $u = 0$  em  $\partial H$  e defina*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{H}, \\ -u(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N), & x \notin \overline{H}. \end{cases}$$

Então  $\tilde{u}$  é harmônica em  $\mathbb{R}^N$ .

*Demonstração.* A função  $\tilde{u}$  é contínua e harmônica em  $\mathbb{R}^N \setminus \partial H$ . Temos que mostrar que  $\tilde{u}$  é harmônica em uma vizinhança de um ponto arbitrário de  $\partial H$ . Sejam  $x_0 \in \partial H$  e  $\delta > 0$  arbitrários. Seja  $v \in C(\overline{B_\delta(x_0)})$  a função harmônica em  $B_\delta(x_0)$  tal que  $v = \tilde{u}$  em  $S_\delta(x_0)$ . Mostremos que  $v = 0$  em  $B_\delta(x_0) \cap \partial H$ . De fato, pondo  $v^\sharp(x) = -v(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N)$ ,  $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ , temos que  $v^\sharp$  é harmônica em  $B_\delta(x_0)$  e para  $x \in S_\delta(x_0)$  temos

$$v^\sharp(x) = -v(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) = -\tilde{u}(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) = \tilde{u}(x) = v(x),$$

logo  $v^\sharp = v$  em  $\overline{B_\delta(x_0)}$ , i.e., a função  $v$  é ímpar em  $x_N$ , e portanto  $v = 0$  quando  $x_N = 0$ . Considere  $w = \tilde{u} - v$ . A função  $w$  é harmônica em  $B_\delta(x_0) \cap H$ , contínua em  $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \overline{H}$  e vale zero na fronteira deste conjunto, portanto  $\tilde{u} = v$  em  $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \overline{H}$ . Analogamente, temos  $\tilde{u} = v$  em  $\overline{B_\delta(x_0)} \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_N \leq 0\}$ .  $\square$

## 6 A desigualdade de Harnack

6.1 TEOREMA. (DESIGUALDADE DE HARNACK) *Seja  $u$  uma função harmônica em  $B_R(x_0)$  tal que  $u \geq 0$  e seja  $x \in B_R(x_0)$ . Então*

$$\left(\frac{R}{R + |x - x_0|}\right)^{N-2} \frac{R - |x - x_0|}{R + |x - x_0|} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R - |x - x_0|}\right)^{N-2} \frac{R + |x - x_0|}{R - |x - x_0|} u(x_0). \quad (12)$$

*Demonstração.* Tome  $|x - x_0| < \rho < R$ . Temos

$$u(x) = \frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \int_{S_\rho(x_0)} \frac{u(y)}{|y - x|^N} d\sigma(y),$$

e  $\rho - |x - x_0| \leq |y - x| \leq \rho + |x - x_0|$ , para  $y \in S_\rho(x_0)$ . Como  $u \geq 0$ , temos

$$\frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \frac{1}{(\rho + |x - x_0|)^N} \int_{S_\rho(x_0)} u(y) d\sigma(y) \leq u(x) \leq \frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\rho \omega_N} \frac{1}{(\rho - |x - x_0|)^N} \int_{S_\rho(x_0)} u(y) d\sigma(y),$$

então basta usar

$$\int_{S_\rho(x_0)} u(y) \, d\sigma(y) = \omega_N \rho^{N-1} u(x_0),$$

simplificar e fazer  $\rho \rightarrow R$ . □

Nas aplicações, será muito útil a seguinte versão da desigualdade de Harnack

6.2 COROLÁRIO. *Seja  $u$  uma função harmônica em  $B_R(x_0)$  tal que  $u \geq 0$  e seja  $0 < r < R$ . Então*

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^N u(x') \leq u(x) \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N u(x'), \quad \forall x, x' \in \overline{B_r(x_0)}.$$

*Demonstração.* Aplicando o Teorema 6.1, temos

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0),$$

para  $x \in \overline{B_r(x_0)}$  já que neste caso  $|x - x_0| \leq r$ . Agora, se  $u = 0$  em  $B_R(x_0)$ , então a desigualdade é óbvia. Caso contrário, temos  $u > 0$  (Corolário 3.4) e basta escrever a desigualdade acima para  $u(x')$  e fazer uma divisão. □

6.3 COROLÁRIO. (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA MONÓTONA DE HARNACK) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto e conexo e  $\{u_n\}$  uma sequência de funções harmônicas em  $\Omega$  tal que  $u_n \leq u_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Então ocorre um dos dois casos*

1. *Existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\{u_n(x_0)\}$  é limitada. Neste caso, a sequência  $\{u_n\}$  converge uniformemente sobre os compactos de  $\Omega$  (para uma função harmônica);*
2. *Para todo  $x \in \Omega$ , temos  $\lim u_n(x) = \infty$ . Neste caso, temos  $u_n \rightarrow \infty$  uniformemente sobre os compactos de  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) < \infty\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega : \sup_n u_n(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são abertos. Se  $x_1 \in \Omega_1$  tome  $r > 0$  tal que  $B_r(x_1)$  tem fecho contido em  $\Omega$ . É uma simples consequência do corolário 6.2 a existência de  $C > 0$  tal que

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq C(u_{n+p}(x_1) - u_n(x_1)), \quad \forall x \in \overline{B_r(x_1)}, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Assim  $B_r(x_1) \subset \Omega_1$  e  $\{u_n\}$  é uniformemente convergente em  $B_r(x_1)$ . Em particular  $\Omega_1$  é aberto. Do mesmo modo, assumindo que  $x_2 \in \Omega_2$  se tomarmos  $\rho > 0$  tal que  $B_\rho(x_2)$  tem fecho contido em  $\Omega$  então  $B_\rho(x_1) \subset \Omega_2$  e  $\{u_n\}$  diverge uniformemente para  $+\infty$  em  $B_\rho(x_2)$ . Em particular  $\Omega_2$  é também aberto e a tese segue do fato de  $\Omega$  ser conexo. □

6.4 COROLÁRIO. (TEOREMA DE LIOUVILLE) *Seja  $u$  uma função harmônica em  $\mathbb{R}^N$  e real. Se  $\sup u < \infty$  ou  $\inf u > -\infty$ , então  $u$  é constante. Em outras palavras, se  $u$  é harmônica em  $\mathbb{R}^N$  então ou  $u$  é constante ou a imagem de  $u$  é igual a  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Considerando  $-u$  se necessário e subtraindo uma constante conveniente podemos assumir  $u \geq 0$ . Aplicamos o Corolário 6.2, com  $x' = 0$  e  $x \in \mathbb{R}^N$  arbitrário. Tomando  $r > |x|$  e fazendo  $R \rightarrow \infty$  segue  $u(x) = u(0)$ . □

O problema de Dirichlet para  $H$  consiste em, dada  $u_0 \in C(\partial H)$ , determinar  $u$  harmônica em  $H$ , contínua em  $\bar{H}$  e satisfazendo  $u = u_0$  em  $\partial H$ . Este problema não goza de unicidade pois se  $u$  é uma solução então  $u(x) + x_N$  também será. Teremos unicidade, entretanto, se nos restringirmos ao ambiente das funções limitadas.

**6.5 TEOREMA.** *Seja  $u$  é harmônica em  $H$ , contínua em  $\bar{H}$  e limitada. Se  $u = 0$  em  $\partial H$  então  $u$  é identicamente nula.*

*Demonstração.* Pelo teorema 5.9 existe  $\tilde{u}$  harmônica em  $\mathbb{R}$  coincidindo com  $u$  em  $H$ ; além do mais, dada a representação explícita de  $\tilde{u}$  no teorema 5.9 segue que  $\tilde{u}$  é limitada se  $u$  o for. Pelo Teorema de Liouville  $\tilde{u}$  é constante. Como porém  $\tilde{u}$  se anula em  $\partial H$  segue que  $\tilde{u}$ , e a fortiori  $u$ , se anula identicamente.  $\square$

Uma versão, em uma direção um pouco diferente, do Teorema de Liouville pode ser obtida simplesmente usando a propriedade da média volumétrica. Concluiremos nosso texto com este resultado.

**6.6 TEOREMA.** *Seja  $u$  uma função harmônica em  $\mathbb{R}^N$ . Suponha que existam constantes  $C > 0$  e  $\theta \in [0, 1[$  tais que*

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^\theta), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (13)$$

*Então  $u$  é constante.*

Note que este resultado é preciso uma vez que uma função polinomial de grau 1 em  $\mathbb{R}^N$  é uma função harmônica que satisfaz (13) com  $\theta = 1$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \neq 0$ . Para qualquer  $R > 0$ , temos

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \frac{N}{R^N \omega_N} \left| \int_{B_R(x)} u(y) \, dy - \int_{B_R(0)} u(y) \, dy \right| \\ &= \frac{N}{R^N \omega_N} \left| \int_{A_1} u(y) \, dy - \int_{A_2} u(y) \, dy \right| \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} A_1 &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y - x| < R \text{ e } |y| > R\}, \\ A_2 &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| < R \text{ e } |y - x| > R\}. \end{aligned}$$

Observe que para  $y \in A_1$  temos  $R < |y| < R + |x|$  e que para  $y \in A_2$  temos  $R - |x| < |y| < R$ . Portanto

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\leq \frac{N}{R^N \omega_N} \int_{R-|x| \leq |y| \leq R+|x|} |u(y)| \, dy \\ &\leq \frac{CN}{R^N \omega_N} \int_{R-|x| \leq |y| \leq R+|x|} (1 + |y|^\theta) \, dy \\ &= \frac{CN}{R^N} \int_{R-|x| \leq r \leq R+|x|} (1 + r^\theta) r^{N-1} \, dr \\ &= \frac{CN(1 + (R + |x|)^\theta)}{R^N} \int_{R-|x| \leq r \leq R+|x|} r^{N-1} \, dr \\ &= \frac{CN}{R^N} (1 + (R + |x|)^\theta) [(R + |x|)^N - (R - |x|)^N] \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $R \longrightarrow \infty$  uma vez que  $(R + |x|)^N - (R - |x|)^N$  é um polinômio de grau  $N - 1$ .  $\square$

## Referências

- **Gerald B. Folland**, “Introduction to Partial Differential Equations” - Preliminary Informal Notes of University Courses and Seminars in Mathematics. Mathematical Notes, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- **Antonio Gilioli**, “Equações Diferenciais Parciais Elípticas” - notas de curso ministrado durante o 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1975.

## Exercícios

1. Mostre que se  $u$  é harmônica em  $\mathbb{R}^N$  e se  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma transformação ortogonal então  $u \circ T$  também é harmônica em  $\mathbb{R}^N$ . Lembre que uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é *ortogonal* se  $({}^tT)T = T({}^tT) = I$ , a aplicação identidade.
2. Determine todas as funções harmônicas em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  da forma  $u(x) = f(|x|)$ , onde  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ .
3. Use o resultado obtido no exercício anterior para obter  $u$  harmônica em  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$ , onde  $0 < r < R < \infty$ , contínua em  $\bar{\Omega}$  e satisfazendo  $u(x) = a$  se  $|x| = r$ ,  $u(x) = b$  se  $|x| = R$  (aqui  $a, b \in \mathbb{R}$ ).
4. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto,  $u$  harmônica em  $\Omega$  e  $x_0 \in \Omega$ . Mostre que se  $N \geq 2$  então  $u^{-1}\{u(x_0)\}$  é infinito. E quando  $N = 1$ ?
5. Fixado  $y \in \mathbb{R}^N$  defina

$$V(x) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^N}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{y\}.$$

Mostre que  $V$  é harmônica em  $\mathbb{R}^N \setminus \{y\}$ .

6. Calcule as integrais

$$\int_{S_1(0)} y_j d\sigma(y), \quad \int_{S_1(0)} y_j y_k d\sigma(y).$$

7. Sejam  $(x, y)$  as coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  e considere os ODPL com coeficientes constantes:

$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Mostre que

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

8. Sejam  $R > 0$  e  $f : S_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Mostre que

$$\int_{S_R(0)} f(y) d\sigma(y) = R^{N-1} \int_{S_1(0)} f(Rz) d\sigma(z).$$

*Sugestão:* Mostre, primeiramente, que esta fórmula é válida para  $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$  escrevendo a expansão de Taylor de  $f$  de ordem 1 na origem na forma

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^N g_j(x) x_j, \quad \text{com } g_j \in C^1(\mathbb{R}^N),$$

e aplicando o teorema da divergência para o campo  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$ . Conclua o caso geral evocando o teorema de Stone-Weierstrass.

9. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto com fronteira regular e conexo. Seja, também,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $tf(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Mostre que toda solução  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  do problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ em } \Omega \\ \partial u / \partial \vec{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

é necessariamente constante (aqui  $\vec{n}$  denota a normal unitária exterior a  $\partial\Omega$ ). Determine, também, uma condição adicional sobre  $f$  que garanta que toda solução de (\*) se anula identicamente.

10. Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ , e seja  $u$  uma função harmônica em  $\Omega$ . Mostre que para cada subconjunto compacto  $K$  de  $\Omega$  vale a desigualdade

$$\sup_{x \in K} |u(x)| \leq \frac{N}{\omega_N \text{dist}(K, \partial\Omega)^N} \int_{\Omega} |u(x)| dx.$$

Conclua o seguinte resultado: se  $u$  é harmônica em  $\mathbb{R}^N$  e se  $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$  então  $u = 0$ .

11. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado e com fronteira regular. Seja também  $g \in C(\bar{\Omega})$ . Mostre que não existe solução  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  para o problema

$$\begin{cases} (\Delta u)(x) = e^{g(x)}, & x \in \Omega; \\ (\partial u / \partial \vec{n})(y) = 0, & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui  $\vec{n}$  é normal a  $\partial\Omega$  e exterior a  $\Omega$ .

12. Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$  e considere uma sequência  $\{u_j\}$  de funções harmônicas em  $\Omega$ , cada uma delas contínua em  $\bar{\Omega}$ . Suponha que

$$\max_{y \in \partial\Omega} |u_j(y) - u_k(y)| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k}, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

Mostre que  $\{u_j\}$  converge uniformemente em  $\bar{\Omega}$  para uma função  $u \in C(\bar{\Omega})$ , que é ainda harmônica em  $\Omega$ .

13. Seja  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Suponha que exista  $u$  harmônica em  $D$ , contínua em  $\bar{D}$  e que coincida com a função  $2x_1^2$  em  $\partial D$ . Determine  $u(0)$ .

14. Sejam  $U = \{x : x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0\}$  e  $f \in C^2(U)$ . Defina, para  $x \in U$ ,

$$f_{\sharp}(x) = \int_{S_1(0)} f(|x|\omega) d\sigma(\omega).$$

Mostre que  $\Delta(f_{\sharp}) = (\Delta f)_{\sharp}$ .

*Sugestão:* Utilize o teorema da divergência e a fórmula de integração em coordenadas polares.

15. Sejam  $\Omega$  um aberto regular de  $\mathbb{R}^2$ , com fronteira de classe  $C^1$ ,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $x \in \Omega$  e

$$E(y) = \frac{1}{2\pi} \log |y| \quad y \in \mathbb{R}^2, y \neq 0.$$

Verifique a validade da fórmula

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \vec{n}_y} - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right\} d\sigma(y).$$

16. Proceda formalmente para determinar a função de Green e a fórmula de Poisson para o semi-espaço

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

Conclua que, para  $N = 2$ , a única solução limitada do problema de Dirichlet para o semi-espaço  $x_2 > 0$ , com dado de fronteira  $v_0 \in C(\partial H) \cap L^\infty(\partial H)$ , é dada por

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(x_1 - y)^2 + x_2^2} v_0(y) dy.$$

17. Verifique que a função de Green para a bola  $B_1(0)$  em  $\mathbb{R}^2$  é dada por

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log|x - y| - \log[|x|^2|y|^2 + 1 - 2(x \cdot y)]^{1/2} \right\}.$$

18. Sejam  $\Omega$  um aberto em  $\mathbb{R}^N$  e  $F \subset \Omega$  tais que  $F$  não tem pontos de acumulação em  $\Omega$ . Mostre que se  $u$  é harmônica e limitada em  $\Omega \setminus F$  então  $u$  se estende a uma função harmônica em  $\Omega$ .

19. Seja  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  se anulando no complementar de um compacto de  $\mathbb{R}^N$ . Denotando por  $E(x)$  o potencial newtoniano em  $\mathbb{R}^N$  mostre que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x - y)f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

é de classe  $C^\infty$  e que  $\Delta u = f$  em  $\mathbb{R}^N$ .

20. Seja  $u$  harmônica em  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$ . Mostre que

$$v(y) = u\left(\frac{y_1}{|y|^2}, -\frac{y_2}{|y|^2}\right)$$

é harmônica em  $U = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < 1\}$ . *Sugestão:* Para simplificar os cálculos defina  $g_1 = y_1|y|^{-2}$ ,  $g_2 = -y_2|y|^{-2}$  e mostre que  $(g_1)_{y_1} = (g_2)_{y_2}$ ,  $(g_1)_{y_2} = -(g_2)_{y_1}$ .

21. Seja  $\Omega$  como no exercício anterior. Demonstre a unicidade para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = u_0 & \text{em } S_1(0). \end{cases}$$

Aqui assumimos  $u_0$  contínua em  $S_1(0)$  e impomos  $u$  contínua e limitada em  $\bar{\Omega}$ .

22. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto,  $u \in C^2(\Omega)$  e  $f \in C^\infty(\Omega)$  tais que  $\Delta u = f$ . Mostre que  $u \in C^\infty(\Omega)$ . *Sugestão:* É suficiente mostrar que  $u|_B$  é de classe  $C^\infty$  para qualquer bola aberta  $B$  com fecho contido em  $\Omega$ . Fixada uma tal bola mostre que existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  se anulando no complementar de um compacto de  $\mathbb{R}^N$  coincidindo com  $f$  em  $B$  (cf. as notas de aula da disciplina "Cálculo Integral" mencionadas no texto). Resolva  $\Delta v = g$  utilizando o exercício 18 acima.

23. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto e  $u \in C^2(\Omega)$ . Suponha que vale a seguinte propriedade:

- dado  $x \in \Omega$  existe  $\delta = \delta(x) > 0$  tal que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y), \quad 0 < r \leq \delta.$$

Mostre que  $u$  é harmônica em  $\Omega$ .

24. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto e conexo e  $u$  harmônica em  $\Omega$ . Mostre que se  $u$  se anula em um aberto não vazio de  $\Omega$  então  $u$  se anula identicamente em  $\Omega$ .

25. Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e conexo de  $\mathbb{R}^N$  satisfazendo a seguinte propriedade:

$$x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega \implies (x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) \in \Omega.$$

Seja  $u$  uma função harmônica em

$$\Omega_+ = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega : x_N > 0\},$$

contínua em

$$\Omega_\bullet = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega : x_N \geq 0\},$$

e nula quando  $x_N = 0$ . Conclua que existe uma única função  $\tilde{u}$  em  $\Omega$  que coincide com  $u$  em  $\Omega_+$ .

26. Seja  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \text{ limitada;} \\ u(x_1, 0) = u_0(x_1), x_1 \geq 0; \\ u(0, x_2) = 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

onde  $u_0$  é contínua e limitada em  $[0, \infty[$ ,  $u_0(0) = 0$ . *Sugestão:* Use o exercício 16.

27. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto e  $u \in C^2(\Omega)$ . Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

(a)  $\Delta u(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \Omega$

(b) Para todo  $x_0 \in \Omega$  e todo  $r > 0$  tal que  $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$  vale

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ry) d\sigma(y).$$

*Sugestão:* Para (1)  $\Rightarrow$  (2) estude a derivada da função

$$g(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S_1(0)} u(x_0 + ty) d\sigma(y), \quad 0 \leq t \leq r.$$

Para (2)  $\Rightarrow$  (1) escreva a expansão de Taylor de ordem 2 de  $u$  em torno de  $x_0$  e utilize o exercício 6.

28. Sejam  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathcal{H}(\Omega)$  o espaço constituído pelas funções harmônicas em  $\Omega$  que pertencem a  $L^2(\Omega)$ . Mostre que  $\mathcal{H}(\Omega)$  é um subespaço fechado de  $L^2(\Omega)$ .

29. Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathcal{A} \subset C^\infty(\Omega)$  uma família de funções harmônicas satisfazendo a seguinte propriedade: para todo  $K \subset \Omega$  compacto existe  $C > 0$  tal que  $\sup_K |u| \leq C$ ,  $\forall u \in \mathcal{A}$ . Mostre que a mesma propriedade é válida para as famílias

$$\mathcal{A}_j \doteq \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} : u \in \mathcal{A} \right\}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Conclua, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli, que para todo  $K \subset \Omega$  compacto, o conjunto  $\{u|_K : u \in \mathcal{A}\} \subset C(K)$  é relativamente compacto em  $C(K)$ . Aqui, como é usual, estamos munindo  $C(K)$  com a distância  $d(f, g) = \sup_K |f - g|$ .

----- oooo -----