MAP0413 - 1o. Semestre de 2018

1a. prova - Gabarito

1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e suponha que para uma dada sequência $\{f_j\}$ em $C(\partial\Omega)$ o problema de Dirichlet para Ω tenha solução com dado de fronteira f_j, $j = 1, 2 \ldots$. Suponha que $f_j \to f$ uniformemente sobre $\partial\Omega$. Mostre então que o problema de Dirichlet para Ω tem solução com dado de fronteira f.

Solução: Para cada j seja $u_j \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira f_j. Como a sequência $\{f_j\}$ é uniformemente convergente ela satisfaz o critério de Cauchy para convergência uniforme. Assim, como $\{u_j\}$ é uma sequência de funções harmônicas, pelo princípio do máximo em sua forma fraca,

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_j - u_k| = \max_{\partial\Omega} |u_j - u_k| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } j, k \to \infty.$$

Logo a sequência $\{u_j\}$ satisfaz o critério de Cauchy para convergência uniforme em $\overline{\Omega}$ e portanto existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_j \to u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Em particular $u_j \to u$ uniformemente sobre os compactos de Ω de onde segue que u é harmônica em Ω. Finalmente

$$u|_{\partial\Omega} = \lim_{j\to\infty} u_j|_{\partial\Omega} = \lim_{j\to\infty} f_j = f$$

e portanto u e solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira f. $\square$

— ooo —

2. Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ e $F \subset \Omega$ tais que F não tem pontos de acumulação em Ω. Mostre que se u é harmônica e limitada em $\Omega \setminus F$ então u se estende a uma função harmônica em Ω.

Solução. Como F não tem pontos de acumulação em Ω dado $x \in F$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega$ e $B_r(x) \cap F = \{x\}$. Assim basta mostrar que a função harmônica $v \doteq u|_{B_r(x)\setminus\{x\}}$ se estende a uma função harmônica definida em $B_r(x)$. Agora v é limitada (pois u é limitada) e também

$$\lim_{y\to x} \frac{v(y)}{E(y-x)} = 0,$$

pois $|v(y)| \leq M$ para algum $M > 0$ e $\lim_{y\to x} 1/E(y-x) = 0$. Aplicando o teorema da singularidade removível segue o resultado $\square$

— ooo —

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e com fronteira regular. Seja também $g \in C(\bar{\Omega})$. Mostre que não existe solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ para o problema

$$\begin{cases} (\Delta u)(x) = e^{g(x)}, \ x \in \Omega; \\ (\partial u/\partial \vec{n})(y) = 0, \ y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui $\vec{n}$ é normal a $\partial\Omega$ e exterior a Ω.

Solução. Suponha que o problema admita uma solução u e aplique o teorema da divergência para o campo $\vec{\nabla}u$, que tem componentes em $C^1(\overline{\Omega})$. Como $\mathrm{div}\vec{\nabla}u = \Delta u$ temos

$$\int_\Omega \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle\vec{\nabla}u(y), \vec{\mathrm{n}}(y)\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\vec{\mathrm{n}}}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0.$$

Asssim obtemos

$$\int_\Omega e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = 0,$$

o que uma contradição, pois se $g(x) \geq c$ para $x \in \overline{\Omega}$ (tal c existe pois g é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto) obtemos

$$\int_\Omega e^{g(x)}\,\mathrm{d}x \geq e^c|\Omega| > 0.$$

— ooo —

4. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja u uma função harmônica em Ω. Mostre que se $B_R(x_0)$ tem fecho contido em Ω então para todo $x \in B_R(x_0)$ tem-se

$$(*) \qquad u(x) = \frac{1}{\omega_N R}\int_{y\in S_R(x_0)} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x-y|^N}\,u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Conclua deste fato que toda função harmônica é de fato de classe C^∞.

Solução. Para $x \in B_r(x_0)$ defina $v(x)$ pelo lado direito da fórmula $(*)$. Então $v \in C^2(B_r(x_0)) \cap C(\overline{B_r(x_0)})$ resolve o seguinte problema de Dirichlet:

$$\Delta v = 0 \text{ em } B_r(x_0),\ v = u \text{ em } S_r(x_0).$$

Como a restrição de u a $\overline{B_r(x_0))}$ também resolve este mesmo problema de Dirichlet, por unicidade (princípio do máximo, forma fraca) obtemos $u = v$, e a primeira parte do exercício está verificada. Para provar que u é C^∞ basta mostrar que a restrição de u a qualquer bola $B_R(x_0)$ com fecho contido em Ω é de classe C^∞. Logo basta mostrar que a integral no lado direito da fórmula $(*)$ é de classe C^∞ em $B_R(x_0)$. Agora a função

$$(\dagger) \qquad B_R(x_0) \ni x \mapsto \frac{1}{|x-y|^N}$$

é infinitamente diferenciável para cada $y \in S_R(x_0)$ fixado; além disto se $K \subset B_R(x_0)$ é compacto e se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ existe $C > 0$ tal que a derivada de ordem α de $(\dagger)$ tem valor absoluto limitado por C se $x \in K$ e se $y \in S_R(x_0)$. Isto permite a derivação de qualquer ordem sob o sinal de integração, o que mostra o que queremos.

— ooo —

5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e denote por $D_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, N$.

1. Mostre que se u é harmônica em Ω o mesmo é verdade para $D_j u$, $j = 1, \dots, N$;

2. Seja $B_R(x_0)$ com fecho contido em Ω. Use a propriedade da média volumétrica para mostrar que se u é harmônica em Ω então

$$|D_j u(x_0)| \leq \frac{N}{R} \sup_{S_R(x_0)} |u|.$$

3. Sejam $K \subset \Omega$ compacto e $U \subset \Omega$ aberto tais que $K \subset U$ e $\overline{U}$ é compacto em Ω. Mostre que se u é harmônica em Ω então

$$\sup_K |D_j u| \leq \frac{N}{\operatorname{dist}(K, \partial U)} \sup_U |u| .$$

4. Conclua que se $\{u_n\}$ é uma sequência de funções harmônicas em Ω que converge uniformemente sobre os compactos de Ω para u então o mesmo é verdade para as sequências $\{D_j u_n\}$, $j = 1, \ldots, N$, com $D_j u_n \to D_j u$.

Solução Toda função harmônica é de classe C^∞. Em particular é de classe C^3 e portanto

$$D_j D_k^2 u = D_2^k D_j u, \; k = 1, \ldots, N.$$

Logo

$$\Delta D_j u = \sum_{k=1}^N D_k^2 D_j u = \sum_{k=1}^N D_j D_k^2 u = D_j \sum_{k=1}^N D_k^2 u = D_j \Delta u = 0.$$

Isto mostra (1). Para (2) note que aplicando a propriedade da média volumétrica para $D_j u$ obtemos

$$D_j u(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} D_j u(x) \mathrm{d}x.$$

Seja $\vec{X}(x) = (0, \ldots, 0, u(x), 0, \ldots, 0)$, onde $u(x)$ aparece na j-ésima posição. Então $\operatorname{div} \vec{X}(x) = D_j u(x)$ e portanto, pelo teorema da divergência,

$$D_j u(x_0) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{S_r(x_0)} \langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle| \leq \underbrace{|\vec{X}(y)|}_{=|u(y)|} \cdot \underbrace{|y - x_0|/R}_{=1}$$

e portanto

$$|D_j u(x_0)| \leq \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{S_r(x_0)} |\langle \vec{X}(y), (y - x_0)/R \rangle| \, \mathrm{d}\sigma(y) \leq \frac{N}{\omega_N R^N} \left(\sup_{S_R(x_0)} |u| \right) \omega_N R^{N-1}$$

o que mostra (2).

Sejam agora K e U como em (3). Seja $\rho = \text{dist}(K, \partial U)$; se $x \in K$ então $\overline{B_\rho(x)} \subset \overline{U}$. Em particular $S_\rho(x) \subset \overline{U}$ e portanto, por (2),

$$|D_j u(x)| \leq \frac{N}{\rho} \sup_{S_\rho(x)} |u| \leq \frac{N}{\rho} \sup_{\overline{U}} |u| = \frac{N}{\rho} \sup_{U} |u| \, .$$

Como $x \in K$ é arbitrário segue (3).

Seja finalmente $\{u_n\}$ como em (4). Por um resultado provado em classe (recíproca da propriedade da média) segue que u é harmônica em Ω. Vamos provar que $D_j u_n \to D_j u$ uniformemente sobre os compactos de Ω. Fixemos um compacto K de Ω e escolhamos U como (3) em (por exemplo, podemos tomar $U = \{x : \text{dist}(x, K) < \varepsilon\}$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno). Aplicando (3), onde substituimos u por $u_n - u$, obtemos

$$\sup_K |D_j(u_n - u)| = \sup_K |D_j u_n - D_j u| \leq \frac{N}{\text{dist}(K, \partial U)} \sup_U |u_n - u|,$$

desigualdade esta válida para todo $j = 1, \ldots, N$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sup_U |D_j u_n - u| \to 0$ quando $n \to \infty$ o mesmo vale para $\sup_K |D_j u_n - u|$, o que conclui o argumento.

— ooo —