MAP0413 - 1o. Semestre de 2018

3a. prova - Gabarito

1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais tal que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n| < \infty$. Mostre que a série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

define uma função infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, de classe C^1 em $\mathbb{R}\times[0,\infty[$ e satisfazendo $u_t - u_{xx} = 0$ em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$.

Solução. Vamos primeiramente verificar que a série define uma fução infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$. Observe que

$$\partial_x^j \partial_t^k (a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx) = \pm a_n n^{2k+j} e^{-n^2 t} g(nx)$$

onde $g = \operatorname{sen}$ ou $g = \cos$. Seja $K \subset \mathbb{R}\times]0,\infty[$ compacto. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x,t) \in K \Rightarrow t \geq \varepsilon$. Logo

$$\sup_{(x,t)\in K} |\partial_x^j \partial_t^k (a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx)| \leq |a_n| n^{2k+j} e^{-\varepsilon n^2}.$$

Note agora que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n| < \infty$ implica que a sequência $\{a_n\}$ é limitada em $\mathbb{R}$. Pelo critério da raíz a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k+j} e^{-\varepsilon n^2}$ é convergente e portanto u é de classe C^∞ em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ pelo exercício 1 da lista extra. Além do mais, pelo mesmo exercício, as derivadas de u podem ser obtidas por derivação termo a termo. Em particular

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\partial_t - \partial_x^2\right)(e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \{-n^2 e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx + n^2 e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx\} = 0.$$

Vamos agora verificar que u é de clsse C^1 em $\mathbb{R}\times[0,\infty[$. Note, antes demais nada, que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| < \infty$, pelo critério da comparação. Por outro lado temos

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty[} |a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx| \leq |a_n|,$$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty[} |n a_n e^{-n^2 t} \cos nx| \leq n|a_n|,$$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty[} |(-n^2) a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx| \leq n^2|a_n|,$$

e portanto, novamente pelo mesmo argumento, segue a afirmação. □

2. Resolva o problema do calor para a barra semi-infinita

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \geq 0; \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Aqui u_0 é contínua e limitada em $[0,\infty[$ e satisfaz $u_0(0)=0$.

Solução. Seja $\tilde{u}_0$ a extensão ímpar de u_0 a $\mathbb{R}$. Como $u_0(0)=0$ segue que $\tilde{u}_0$ é contínua. Como u_0 é limitada segue também que $\tilde{u}_0$ é limitada. Seja

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t}\tilde{u}_0(y)\mathrm{d}y.$$

Então $\tilde{u}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, satisfaz a equação do calor, é contínua em $\mathbb{R}\times[0,\infty[$ e $\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}_0(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Logo se definirmos $u(x,t)$ como sendo a restrição de $\tilde{u}$ a $[0,\infty[\times]0,\infty[$ vemos que u satisfaz às duas primeiras propriedades requeridas. Resta verificar que $u(0,t)=0$ para $t\geq 0$. Temos, contudo,

$$u(0,t)=\tilde{u}(0,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4t}\tilde{u}_0(y)\mathrm{d}y=0,\quad t>0,$$

uma vez que $y\mapsto\tilde{u}_0(y)\exp\{-y^2/4t\}$ é uma função ímpar. □

3. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x^2+t^2 \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R},\\ u(x,0)=\cos x,\ x\in\mathbb{R},\\ u_t(x,0)=\operatorname{sen} x,\ x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Solução. A solução $u(x,t)$ do problema será a soma $u_1(x,t)+u_2(x,t)$, onde $u_1(x,t)$ é a solução do correspondente problema homogêneo, a qual é dada pela fórmula de D'Alembert,

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\{\cos(x+t)+\cos(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\operatorname{sen}\tau\mathrm{d}\tau$$

e $u_2(x,t)$ é a solução do correspondente problema não homogêneo com condições iniciais nulas, a qual é dada pelo princípio de Duhamel,

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\int_{D(x,t)}(y^2+s^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

Um cálculo explícito fornece

$$u(x,t)=\cos(x-t)+\frac{x^2t^2}{2}+\frac{t^4}{6}.$$

4. Seja $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ solução de

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & x,t\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R},\\ u_t(x,0)=g(x), & x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

Dado $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ com $t > 0$ seja K o compacto de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é definido pelo triângulo com vértices $A = (x,t)$, $B = (x+t,0)$, $C = (x-t,0)$. Suponha que $g \leq 0$ em $\overline{BC}$. Mostre que o máximo de u em K é assumido em $\overline{BC}$.

Solução. Seja $(x_0,t_0) \in K$. Então o segmento $[x_0 - t_0, x_0 + t_0] \subset \overline{BC}$. Além do mais temos, pela fórmula de D'Alembert,

$$u(x_0,t_0) = \frac{u(x_0-t_0,0)+u(x_0+t_0,0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(s)\mathrm{d}s \leq \frac{u(x_0-t_0,0)+u(x_0+t_0,0)}{2}$$

pois $g \leq 0$ em $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. Seja

$$M := \max_{\overline{BC}} u.$$

Pela desigualdade precedente

$$u(x_0,t_0) \leq \frac{M+M}{2} = M.$$

Como (x_0,t_0) é um ponto arbitrário de K e como $\overline{BC} \subset K$, obtemos $\max_K u \leq M \leq \max_K u$, isto é, $\max_K u = M$. $\square$

5. Demonstre, estudando o comportamento da função

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^a \left\{u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2\right\} \mathrm{d}x$$

a unicidade de solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ em }]0,a[\times\mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x),\ x \in [0,a], \\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in [0,a], \\ u(0,t) = u(a,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aqui $u \in C^2([0,a]\times\mathbb{R})$, $f \in C^2([0,a])$ e $g \in C^1([0,a])$.

Solução. Temos que mostrar que se $f = g = 0$ então $u = 0$. Neste caso temos $u(x,0) = 0$ e, derivando, $u_x(x,0) = 0$. Como também $u_t(x,0) = 0$ obtemos $E(0) = 0$. Suponha, por um instante, que tenhamos mostrado que $E'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $E \equiv 0$ donde obtemos que $\vec{\nabla} u = 0$ em $[0,a]\times\mathbb{R}$. Assim u é constante em $[0,a]\times\mathbb{R}$; mas $u(x,0) = 0$ e portanto $u = 0$, que é o que queríamos mostrar.
Temos

$$E'(t) = \int_0^a \left\{u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\right\} \mathrm{d}x.$$

Mas

$$u_x(x,t)u_{xt}(x,t) = (u_x u_t)_x(x,t) - u_t(x,t)u_{xx}(x,t)$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \int_0^a \{u_t(x,t)\underbrace{[u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)]}_{=0}+(u_xu_t)_x(x,t)\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a (u_xu_t)_x(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= u_x(a,t)u_t(x,a)-u_x(0,t)u_t(0,t).
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $u(0,t)=u(a,t)=0$ para todo t obtemos, derivando em t, $u_t(0,t)=u_t(a,t)=0$ e portanto $E'(t)=0$. □

6. Seja $f\in C^2(\mathbb{R})$ ímpar, $f=0$ no complementar de $[-2,-1]\cup[1,2]$. Esboce, no semiplano $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : t>0\}$, o conjunto dos pontos onde você pode assegurar que a solução do problema abaixo se anula:

$$
\begin{cases}
u_{tt}-u_{xx}=0 & \text{em } \mathbb{R}\times]0,\infty[, \\
u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}, \\
u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Solução. O domínio influência do conjunto $[-2,1]\cup[1,2]$ para $t>0$ será a reunião $\mathfrak{D}$ das quatro regiões abaixo

$$\mathfrak{D}_1=\{(x,t):t>0,\ -2\le x+t\le -1\}$$

$$\mathfrak{D}_2=\{(x,t):t>0,\ -2\le x-t\le -1\}$$

$$\mathfrak{D}_3=\{(x,t):t>0,\ 1\le x+t\le 2\}$$

$$\mathfrak{D}_4=\{(x,t):t>0,\ 1\le x-t\le 2\}.$$

Logo podemos assegurar que u se anula no complementar de $\mathfrak{D}$. Agora, uma vez que

$$u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

e que f é uma função ímpar, podemos também concluir que u também se anula no conjunto $\{(0,t)\in\mathbb{R}^2 :\ t>0\}$.

Observação. Uma vez que f é de classe C^2, em particular contínua, temos $f(-2)=f(-1)=f(1)=f(2)=0$. Logo u também se anula na fronteira de $\mathfrak{D}$ relativa a $\{(x,t):t>0\}$. □