MAP0413 - 1o. Semestre de 2018

2a. prova - Gabarito

1. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Solução: Temos

$$\widehat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y,x\rangle} g(y)\mathrm{d}y$$

e portanto

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y,x\rangle} g(y)\mathrm{d}y\right\}\,\mathrm{d}x.$$

Agora

$$\psi(x,y) \doteq e^{-i\langle x,y\rangle} f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

uma vez que, pelo Teorema de Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} |\psi(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} |f(x)|\,|g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

e portanto podemos, pelo Teorema de Fubini, inverter a ordem de integração em $(*)$, obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y,x\rangle} g(y)\mathrm{d}y\right\}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\left\{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y,x\rangle} f(x)\mathrm{d}x\right\}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

2. Sejam $f, g \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Suponha que f e g se anulam em $]-\infty, 0]$. Mostre então que $f \star g$ também se anula em $]-\infty, 0]$.

Solução: Como $g(y) = 0$ se $y < 0$ obtemos

$$(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Mas se $x < 0$ então $x - y < 0$ se $y \geq 0$ e portanto $f(x-y) = 0$. Logo

$$(f\star g)(x) = \int_0^\infty \underbrace{f(x-y)}_{=0} g(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

3. Dados $h \in \mathbb{R}^N$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ defina $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$.

- Determine $\widehat{\tau_h(f)}$ em termos de $\widehat{f}$.

- Mostre que $\widehat{\tau_h(f)} \xrightarrow{h\to 0} \widehat{f}$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Solução: Temos

$$\widehat{\tau_h(f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x+h)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y-h,\xi\rangle} f(y)\,\mathrm{d}y = e^{i\langle h,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi),$$

onde fizemos $y = x+h$. Portanto

$$\widehat{\tau_h(f)}(\xi) = e^{i\langle h,\xi\rangle}\widehat{f}(\xi).$$

Logo

$$\|\widehat{\tau_h(f)} - \widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\tau_h(f)}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1||\widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \to 0 \text{ quando } h \to 0$$

pelo teorema da convergnência dominada, já que

$$|e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1||\widehat{f}(\xi)| \to 0 \text{ quando } h \to 0 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^N;$$

$$|e^{i\langle h,\xi\rangle} - 1||\widehat{f}(\xi)| \le 2|\widehat{f}(\xi)| \in Ł^1(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } h \in \mathbb{R}^N.$$

4. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais.

- Mostre que se $\{a_n\}$ é limitada então a série

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

  define uma função infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ satisfazendo $u_t - u_{xx} = 0$.

- Mostre que se $\sum_n |a_n| < \infty$ então u é contínua em $\mathbb{R}\times[0,\infty[$.

Solução. Para a primeira parte bastará mostrar que dado $\varepsilon > 0$ as séries das derivadas dos somandos convergem uniformemente em $\mathbb{R}\times[\varepsilon,\infty[$. Derivando j vezes com relação a x e k vezes com relação a t obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-n)^{2k} n^j e^{-n^2 t} g(nx)$$

onde $g = \pm\operatorname{sen}$ ou $g = \pm\cos$. Para mostrar a convergência uniforme desta série em $\mathbb{R}\times[\varepsilon,\infty[$ bastará mostrar que seu termo geral é uniformemente limitado $\mathbb{R}\times[\varepsilon,\infty[$ por uma constante $M_n > 0$ tal que $\sum_n M_n < \infty$ (M-teste de Weierstrass). Temos

$$\left|a_n(-n)^{2k} n^j e^{-n^2 t} g(nx)\right| \le C n^{2k+j} e^{-\varepsilon n^2}, \text{ em } \mathbb{R}\times[\varepsilon,\infty[,$$

onde $C > 0$ é tal que $|a_n| \le C$ para todo $n \ge 1$. Logo podemos tomar

$$M_n = C n^{2k+j} e^{-\varepsilon n^2}.$$

Uma vez que

$$M_n^{1/n} = C^{1/n} n^{(2k+j)/n} e^{-\varepsilon n} \to 1 \times 1 \times 0 = 0$$

o teste da raiz mostra que $\sum_n M_n < \infty$. Assim u é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \times]0, \infty[$. Como então as derivadas de u são obtidas pelas séries das respectivas derivadas, temos

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{(\partial_t - \partial_x^2) \left\{ e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \right\}}_{=0} = 0.$$

Para a segunda parte temos

$$\left| a_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \right| \leq |a_n| \text{ em } \mathbb{R} \times [0, \infty[.$$

Como $\sum_n |a_n| < \infty$ segue pelo M-teste de Weierstrass que a série que define u converge uniformemente em $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. Como limite uniforme de funções contínuas define uma função contínua segue que u é contínua em $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.

5. Seja $u(x,t)$ uma solução de classe C^2 da equação

$$u_t = u_{xx} + tu$$

em $]0, a[\times]0, T[\subset \mathbb{R}^2$, contínua em $[0, a] \times [0, T]$. Mostre que

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^{T^2/2} \max_{\gamma} |u|,$$

onde $\gamma \doteq (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{a\} \times [0, T]) \cup ([0, a] \times \{0\})$.

Solução. Seja $v(x,t) = e^{-t^2/2} u(x,t)$. Então

$$v_t(x,t) = e^{-t^2/2} u_t(x,t) - t e^{-t^2/2} u(x,t) = e^{-t^2/2} \{u_t(x,t) - tu(x,t)\} = e^{-t^2/2} u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t).$$

Logo v statisfaz a equação do calor e, como consequência, o princípio do máximo. Assim

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |v| = \max_{\gamma} |v|. \tag{1}$$

Como $|v| \leq |u|$ obtemos

$$\max_{\gamma} |v| \leq \max_{\gamma} |u|. \tag{2}$$

Por outro lado se $0 \leq t \leq T$ e $x \in [0, a]$ temos

$$|v(x,t)| \geq e^{-T^2/2} u(x,t)$$

e portanto

$$\max_{[0,a]\times[0,T]} |u| \leq e^{T^2/2} \max_{[0,a]\times[0,T]} |v|. \tag{3}$$

A conclusão do exercício segue de (1), (2) e (3).

6. Sejam $m \in \mathbb{Z}_+$ e $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ um polinômio em $\mathbb{R}^N$ não identicamente nulo. Assuma o seguinte resultado como conhecido:

$$\{\xi \in \mathbb{R}^N : P(\xi) = 0\} \text{ é um conjunto com interior vazio.}$$

Mostre então que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e se $P(D)f = 0$ então $f = 0$.

Solução. Tomando a transformada de Fourier em ambos os membros da equação $P(D)f = 0$ obtemos

$$\mathcal{F}\{P(D)f\}(\xi) = \mathcal{F}\left\{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f\right\}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = 0.$$

Se denotarmos $Q(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha$ então $Q(\xi)$ é um polinômio em $\mathbb{R}^N$ não identicamente nulo e $Q(\xi)\hat{f}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Aplicamos o resultado enunciado no exercício: o conjunto onde Q se anula tem interior vazio ou, o que é equivalente, $\mathbb{R}^N \setminus Q^{-1}\{0\}$ é denso em $\mathbb{R}^N$. Seja então $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ arbitrário. Existe $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^N \setminus Q^{-1}\{0\}$, $\xi_n \to \xi_0$. Temos $Q(\xi_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica $\hat{f}(\xi_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\hat{f}(\xi_0) = \lim_n \hat{f}(\xi_n) = 0$. Concluímos que $\hat{f} = 0$ em $\mathbb{R}^N$ e, como a transformada de Fourier é uma bijeção em $\mathcal{S}$, segue que $f = 0$.