Funções Holomorfas a Valores em um $\mathbb{C}$-Espaço Vetorial Topológico

Jadevilson Cruz Ribeiro

Rafael Pereira Lima

28 de junho de 2017

1 Introdução

Neste trabalho iremos apresentar um conceito de funções holomorfas de Ω em X, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ e X é um espaço vetorial topológico. O principal objetivo deste trabalho é mostrar que funções fracamente holomorfas sob certas condições são fortemente holomorfas. Para isso, precisamos definir integrais a valores vetoriais. Sob certas condições, vamos mostrar que podemos generalizar os resultados de funções holomorfas no sentido usual para funções holomorfas em um certo espaço vetorial topológico.

2 Integração de funções a valores vetoriais

Se X é um espaço vetorial topológico e Q um espaço mensurável com medida μ, queremos definir a integral de $f : Q \to X$

$$\int_Q f d\mu$$

Podemos tentar construir essa integral de modo análogo à definição da integral de Lebesgue.

Digressão: A construção da integral de Lebesgue no espaço de funções mensuráveis de Q em $\mathbb{R}_+$ segue três passos principais:

(i) Dizemos que uma função $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se para todo número $\alpha > 0$, o conjunto $\{x \in Q : f(x) > \alpha\}$ é mensurável.

(ii) Definimos as funções simples como sendo as funções $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ que podem ser escritas como

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

onde cada $A_i \subset Q$ é mensurável, cada $a_i > 0$. Dizemos que essa soma é uma representação de φ. Note que essa representação não é única.

(iii) Calculamos a integral de cada função simples φ como

$$\int_Q \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

A integral de uma função simples não depende de sua representação. Por isso, a integral está bem definida.

(iv) Definimos a integral de uma função mensurável positiva $f : Q \to \mathbb{R}$ como

$$\int_Q f d\mu = \sup \left\{ \int_Q \varphi d\mu : \varphi \text{ simples e } \varphi \leq f \right\}$$

Usando o mesmo raciocínio, podemos tentar construir a integral de uma função $f : Q \to X$ em um espaço vetorial topológico X da seguinte forma:

(i) Definimos as funções simples como sendo as funções $\varphi : Q \to X$ tais que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$$

onde cada $x_i \in X$, cada $A_i \subset Q$ é mensurável com $\mu(A_i) < \infty$. Chamamos essa soma de uma representação de φ.

(ii) Definimos a integral de φ como

$$\int_Q \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i)$$

Vamos mostrar que a integral de uma função simples está bem definida, ou seja, não depende de sua representação.

Lema 1. *Se $\varphi : Q \longrightarrow X$ é uma função simples com representação*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$$

Então φ possui uma representação

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{B_j}$$

tal que $B_1, \ldots, B_m$ são disjuntos, $B_1 \cup \ldots \cup B_m = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(B_j)$$

Demonstração. Vamos provar por indução.

(i) Para $n = 1$, escolha $m = 1$, $B_1 = A_1$ e $y_1 = x_1$. Segue a conclusão.

(ii) Suponha que a proposição é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que a proposição vale para $n + 1$.

Seja

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \chi_{A_i}$$

Note que $\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ é uma representação de uma função simples. Por hipótese de indução, existem $y_1, \ldots, y_m \in Q$ e existem $B_1, \ldots, B_m$ disjuntos tais que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{B_j} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(B_j)$$

Como $B_1, \ldots, B_m$ são disjuntos, segue que $A_{n+1} \cap B_1, \ldots, A_{n+1} \cap B_m$ são disjuntos.

Defina, para $i = 1, \ldots, 2m+1$,

$$C_i = \begin{cases} A_{n+1} \cap B_i & \text{se } i \leq m \\ B_{i-m} \setminus A_{n+1} & \text{se } m < i \leq 2m \\ A_{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j & \text{se } i = 2m+1 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_i = \begin{cases} x_{n+1} + y_i & \text{se } i \leq m \\ y_{i-m} & \text{se } m < i \leq 2m \\ x_{n+1} & \text{se } i = 2m+1 \end{cases}$$

Então,

a)

$$\sum_{i=1}^{2m+1} c_i \mu(C_i) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \mu(A_k)$$

pois

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2m+1} c_i\mu(C_i) &= \sum_{i=1}^{m} c_i\mu(C_i) + \sum_{i=m}^{2m} c_i\mu(C_i) + c_{2m+1}\mu(C_{2m+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(x_{n+1}+y_i)\mu(A_{n+1}\cap B_i) + \sum_{i=m+1}^{m} y_{i-m}\mu(B_{i-m}\setminus A_{n+1}) \\
&+ x_{n+1}\mu\left(A_{n+1}\setminus\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_{n+1}\mu\left(A_{n+1}\cap B_i\right) + \sum_{i=1}^{m} y_i\mu\left(A_{n+1}\cap B_i\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} y_i\mu\left(B_i\setminus A_{n+1}\right) + x_{n+1}\mu\left(A_{n+1}\setminus\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\
&= x_{n+1}\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right)\cap A_{n+1}\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} y_i\left[\mu(A_{n+1}\cap B_i) + \mu(B_i\setminus A_{n+1})\right] \\
&+ x_{n+1}\mu\left(A_{n+1}\setminus\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\
&= x_{n+1}\mu(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{m} y_i\mu(B_i) \\
&= x_{n+1}\mu(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} x_k\mu(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_k\mu(A_k)
\end{aligned}
$$

b)

$$
\bigcup_{i=1}^{2m+1} C_i = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i
$$

porque

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{2m+1} C_i &= \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_{n+1} \cap B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} (B_i \setminus A_{n+1})\right) \cup \left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{m} [(A_{n+1} \cap B_i) \cup (B_i \setminus A_{n+1})]\right) \cup \left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right) \cup \left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\
&= A_{n+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right) \\
&= A_{n+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \qquad \text{pois } A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_m
\end{aligned}
$$

c) $C_1, \ldots, C_{2m+1}$ são disjuntos.

$B_1, \ldots, B_m$ são disjuntos. Então, para todo $i, j \leq m$ com $i \neq j$, temos

$$C_i \cap C_j = (A_{n+1} \cap B_i) \cap (A_{n+1} \cap B_j) = \varnothing$$

Se $m < i, j \leq 2m$ e $i \neq j$, então

$$C_i \cap C_j = (B_{i-m} \setminus A_{n+1}) \cap (B_{j-m} \setminus A_{n+1}) = \varnothing$$

Agora, se $1 \leq i \leq m$, $m < j \leq 2m$ e $k = 2m$, então

$$
\begin{aligned}
C_i \cap C_j &= (A_{n+1} \cap B_i) \cap (B_{j-m} \setminus A_{n+1}) && = \varnothing \\
C_i \cap C_k &= (A_{n+1} \cap B_i) \cap \left(A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right)\right) && = \varnothing \\
C_j \cap C_k &= (B_{j-m} \setminus A_{n+1}) \cap \left(A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right)\right) && = \varnothing
\end{aligned}
$$

d)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{2m+1} z_i \chi_{C_i}$$

Seja

$$\psi = \sum_{i=1}^{2m+1} z_i \chi_{C_i}$$

Seja $x \in Q$. Se $x \notin A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ então $x \notin C_1 \cup \ldots \cup C_{2m+1}$. Então $\varphi(x) = 0 = \psi(x)$.

Se $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} = C_1 \cup \ldots \cup C_{2m+1}$, então existe um único i tal que $x \in C_i$.

A. Se $i \leq m$ então $x \in A_{n+1} \cap B_i$. Então $\chi_{A_{n+1}}(x) = 1$ e $\chi_{B_l}(x) = 1$ se, e somente se, $l = i$. Então

$$\begin{aligned}\psi(x) = z_i = x_{n+1} + y_i &= x_{n+1} + \sum_{l=1}^{m} y_l \chi_{B_l}(x) \\ &= x_{n+1}\chi_{A_{n+1}}(x) + \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}(x) \\ &= \varphi(x)\end{aligned}$$

B. Se $m < i \leq 2m$, então $x \in B_{i-m} \setminus A_{n+1}$. Então $\chi_{A_{n+1}}(x) = 0$ e $\chi_{B_l}(x) = 1$ se, e somente se, $l = i - m$. Então

$$\psi(x) = z_i = y_{i-m} = \sum_{l=1}^{m} y_l \chi_{B_l}(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \chi_{A_k}(x)$$

C. Se $i = 2m + 1$, então $x \notin B_1 \cup \ldots B_m$ e $x \in A_{n+1}$. Logo

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x_{n+1} \\ &= \chi_{A_{n+1}}(x) x_{n+1} \\ &= \chi_{A_{n+1}}(x) x_{n+1} + \sum_{l=1}^{m} y_l \chi_{B_l}(x) \\ &= \chi_{A_{n+1}}(x) x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}(x) \\ &= \psi(x)\end{aligned}$$

Logo

$$\psi = \sum_{i=1}^{2m+1} z_i \chi_{C_i} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \chi_{A_k} = \varphi$$

$\square$

Proposição 1. *A integral de φ não depende da representação.*

Demonstração. Seja $\varphi : Q \longrightarrow X$ uma função simples não nula (para $\varphi = 0$ a demonstração é trivial). Sejam $\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_k}$ e $\sum_{k=1}^{r} x_k \chi_{X_k}$ duas representações de φ.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $A_1 \cup \ldots \cup A_m = X_1 \cup \ldots \cup X_r$. Se $A_1 \cup \ldots \cup A_m \subset X_1 \cup \ldots \cup X_r$, podemos construir a seguinte representação de ϕ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_k} + 0\chi_{(X_1 \cup \ldots \cup X_r) \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_m)}$$

Note que essa representação preserva a integral. (Análogo para $A_1 \cup \ldots \cup A_m \supset X_1 \cup \ldots \cup X_r$)

Pelo Lema 1, existem $B_1, \ldots, B_n \subset Q$ mensuráveis e disjuntos, $Y_1, \ldots, Y_s$ conjuntos mensuráveis e disjuntos, $b_1, \ldots, b_n, y_1, \ldots, y_s \in Y$, tais que

$$\begin{cases} \varphi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j} = \sum_{l=1}^{s} X_l \chi_{X_l} \\ \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j) \\ \sum_{k=1}^{r} x_i \mu(X_i) = \sum_{l=1}^{s} y_s \mu(Y_l) \\ \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{k=1}^{r} X_k = \bigcup_{l=1}^{s} Y_l \end{cases} \tag{1}$$

Vamos mostrar que $b_j \mu(B_j \cap Y_l) = y_l \mu(B_j \cap Y_l)$ para todo i, j.

Suponha que $B_i \cap Y_l \neq \varnothing$. Então existe $x \in B_i \cap Y_l$. Como $B_1, \ldots, B_n$ são disjuntos e $Y_1, \ldots, Y_s$ são disjuntos, temos $\varphi(x) = b_i = y_l$. Então $b_j \mu(B_j \cap Y_l) = y_l \mu(B_j \cap Y_l)$. Suponha que $B_i \cap Y_l = \varnothing$. Então $\mu(B_j \cap Y_l) = 0 \Rightarrow b_j \mu(B_j \cap Y_l) = y_l \mu(B_j \cap Y_l)$

Agora iremos mostrar que $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{k=1}^{r} x_i \mu(X_i)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i) &= \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(B_j) && \text{por (1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j\mu\left(B_j \cap \left(\bigcup_{l=1}^{s} Y_l\right)\right) && \text{por (1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j\mu\left(\bigcup_{l=1}^{s} (B_j \cap Y_l)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{l=1}^{s} \mu\left(B_j \cap Y_l\right) && \text{pois } Y_1, \ldots, Y_s \text{ são disjuntos}\\
&= \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} b_j\mu\left(B_j \cap Y_l\right)\\
&= \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} y_j\mu\left(B_j \cap Y_l\right)\\
&= \sum_{l=1}^{s} y_j \sum_{j=1}^{n} \mu\left(B_j \cap Y_l\right)\\
&= \sum_{l=1}^{s} y_j\mu\left(\bigcup_{j=1}^{s} (B_j \cap Y_l)\right) && \text{pois } B_1, \ldots, B_n \text{ são disjuntos}\\
&= \sum_{l=1}^{s} y_j\mu\left(Y_l \cap \left(\bigcup_{j=1}^{s} B_j\right)\right)\\
&= \sum_{l=1}^{s} y_j\mu\left(Y_l\right) && \text{por (1)}\\
&= \sum_{k=1}^{r} x_k\mu\left(X_k\right) && \text{por (1)}
\end{aligned}
$$

□

Note que a integral de φ é um elemento de X, não necessariamente um número. No entanto, temos um problema ao tentar definir a integral de uma função $f : Q \to X$, pois não existe uma relação de ordem óbvia entre funções de Q em X.

A integral de uma função simples satisfaz a seguinte propriedade:

Proposição 2. *Sejam Q um espaço mensurável com medida μ e X um espaço vetorial topológico. Se $\varphi : Q \to X$ é uma função simples, então, para todo $\Lambda \in X'$,*

$\Lambda\varphi = \Lambda \circ \varphi$ é Lebesgue integrável com integral de Lebesgue

$$\int_Q \Lambda\varphi d\mu$$

Mais ainda,

$$\Lambda \int_Q \varphi d\mu = \int_Q \Lambda\varphi d\mu$$

Demonstração. Seja $\varphi : Q \to X$ uma função simples. Então existem $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset Q$ mensuráveis e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$$

Então

$$\int_Q \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i)$$

Seja $\Lambda \in X'$. Então, definindo $\Lambda\varphi$ como $\Lambda \circ \varphi$, temos, para todo $q \in Q$,

$$\begin{aligned}(\Lambda\varphi)(q) &= \Lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}(q)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} (\Lambda x_i)\chi_{A_i}(q)\end{aligned}$$

Logo

$$\Lambda\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\Lambda x_i)\chi_{A_i}$$

onde cada $\Lambda x_i \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). Então $\Lambda\varphi$ é uma função simples no sentido de Lebesgue. Então podemos calcular sua integral como

$$\int_Q \Lambda\varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} (\Lambda x_i)\mu(A_i)$$

Mas

$$\begin{aligned}\int_Q \Lambda\varphi d\mu &= \sum_{i=1}^{n} (\Lambda x_i)\mu(A_i) \\ &= \Lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i)\right) \\ &= \Lambda\left(\int_Q \varphi d\mu\right)\end{aligned}$$

$\square$

Vamos definir a integral de f de modo que a propriedade

$$\Lambda\left(\int_Q f d\mu\right) = \int_Q \Lambda f d\mu, \forall\Lambda \in X'$$

seja satisfeita. Note que Λf, definida como $\Lambda \circ f$, é uma função de Q em $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). Então se $\int_Q \Lambda f d\mu$ estiver definida, a integral será de Lebesgue. Para isso apresentaremos a definição de funções fracamente mensuráveis.

Definição 1. *Seja Q um espaço mensurável com medida μ. Uma função $f : Q \longrightarrow X$ é dita fracamente mensurável se Λf é mensurável no sentido de Lebesgue para todo $\Lambda \in X'$.*

Definição 2. *Seja μ uma medida sobre um espaço mensurável Q. Seja X um espaço vetorial topológico cujo dual X' separa pontos de X.*

Seja $f : Q \to X$ fracamente mensurável.

Se existir $y \in X$ tal que

$$\forall\Lambda \in X', \Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu$$

então definimos

$$y = \int_Q f d\mu$$

Observação 1. *Note que, sob as condições da definição, existe no máximo um $y \in X$ tal que*

$$\forall \Lambda \in X', \Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu$$

o que implica que a integral de f, se existir, está bem definida.

Demonstração. Seja $f : Q \to X$ tal que existe $y \in X$ onde

$$y = \int_Q f d\mu$$

Seja $z \in X$, $z \neq y$. Como X' separa pontos de X, existe $\Lambda \in X'$ tal que $\Lambda y \neq \Lambda z$. Assim

$$\int_Q \Lambda f d\mu = \Lambda y \neq \Lambda z$$

Logo

$$z \neq \int_Q f d\mu$$

□

Lema 2. *Seja X um espaço vetorial topológico. Seja Q um espaço topológico com medida de Borel μ tal que $\mu(Q) < \infty$. Seja $f : Q \to X$ contínua tal que $\overline{f(Q)}$ é compacto.*

Então, para todo $V \in \Phi_X(0)$, existem $A_1, \ldots, A_n \subset Q$ mensuráveis e disjuntos com $\bigcup_{i=1}^n A_i = Q$ e $x_1, \ldots, x_n \in Q$ tais que a função simples φ definida como

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \chi_{A_i}$$

satisfaz a seguinte propriedade:

$$\forall x \in Q, \varphi(x) \in f(x) + V$$

Demonstração. Dado $V \in \Phi_X(0)$, seja $W \in \Phi_X(0)$ aberto e equilibrado tal que $W \subset V$. Então

$$\overline{f(Q)} \subset \bigcup_{x \in Q} (f(x) + W)$$

Como $\overline{f(Q)}$ é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n$ tais que

$$f(Q) \subset \overline{f(Q)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f(x_i) + W)$$

Seja, para todo $i = 1, \ldots, n$, $U_i = f^{-1}(f(x_i) + W)$. Então, pela continuidade de f, cada U_i é aberto e

$$\begin{aligned}
&f(Q) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f(x_i) + W) \\
\Rightarrow &f^{-1}(f(Q)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (f(x_i) + W)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(f(x_i) + W) \\
\Rightarrow &Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(f(x_i) + W) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i
\end{aligned}$$

Defina, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$A_i = \begin{cases} U_1, & \text{se } i = 1 \\ U_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k, & \text{se } i > 1 \end{cases}$$

Observe que cada A_i é mensurável, pois A_1 é aberto e, para $i > 1$, A é a interseção de um aberto (U_i) com um fechado $(\bigcup_{k=1}^{i-1} U_k)^{\complement}$. Além disso, $A_1, \ldots, A_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = Q$$

Seja

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \chi_{A_i}$$

Então, dado $x \in Q$, existe um único A_i com $x \in A_i$. Assim, $\varphi(x) = f(x_i)$, e

$$
\begin{aligned}
&f(x) \in f(x_i) + W \\
\Rightarrow &f(x) - f(x_i) \in W \\
\Rightarrow &f(x_i) - f(x) \in -W = W && \text{pois } W \text{ é equilibrado} \\
\Rightarrow &f(x_i) \in f(x) + W \\
\Rightarrow &\varphi(x) \in f(x) + W \subset f(x) + V
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1. *Seja X um espaço vetorial topologico tal que X' separa pontos de X. Seja μ uma medida de Borel sobre um espaço topológico Hausdorff Q tal que $0 < \mu(Q) < \infty$.*

Sejam $f : Q \to X$ contínua e $H = Conv(f(Q))$. Se H é relativamente compacto, então existe a integral de f:

$$y = \int_Q f d\mu$$

e $y \in \mu(Q)\overline{H}$.

Demonstração. Seja $I = \Phi_X(0)$ com a relação de ordem $\preceq$ definida como:

$$U \preceq W \Leftrightarrow W \subset U$$

Então I é um conjunto dirigido. Como $f(Q) \subset \overline{H}$ e $\overline{H}$ é compacto, então $\overline{f(Q)}$ é compacto. Logo, pelo Lema 2, para todo $V \in I$, existe

$$\varphi_V = \sum_{i=1}^{n^{(V)}} f(x_i^{(V)}) \chi_{A_i^{(V)}}$$

tal que, para todo $x \in Q$, $\varphi_V(x) \in f(x) + V$. Então φ converge para f pontualmente.

(a) Suponha que μ é uma medida de probabilidade sobre Q.

Seja $(y_V)_{V \in I}$ um net definido como

$$y_V = \int_Q \varphi_V d\mu$$

Então cada y_V é uma combinação convexa de elementos de $f(Q)$, pois

$$y_V = \int_Q \varphi_V d\mu = \sum_{i=1}^{n^{(V)}} f(x_i^{(V)})\mu(A_i^{(V)}) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n^{(V)}} \mu(A_i^{(V)}) = 1$$

Logo, cada $y_V \in H$, o que implica que $((y_V)_{V\in I})$ é uma sequência em $\overline{H}$. Como $\overline{H}$ é compacto, $(y_V)_{V\in I}$ possui um subnet $(y_{h(\beta)})_{\beta\in J}$ convergindo para algum $y \in \overline{H}$.

Então, dado $\varepsilon > 0$,

(i) Como $(y_{h(\beta)})_{\beta\in J} \longrightarrow y$ e Λ é contínua, existe $\beta_1 \in J$ tal que, para todo $\beta \in J$,

$$\beta \geq \beta_1 \Rightarrow |\Lambda(y_{h(\beta)}) - \Lambda y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ii) Como Λ é contínua em 0, existe V_ε tal que $\Lambda(V_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$.

$(\varphi_{h(\beta)})_{\beta\in J}$ é um subnet de $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$. Logo, existe β_2 tal que, para todo $\beta \in J$ com $\beta \geq \beta_2$, temos, para todo $x \in Q$,

$$\varphi_{h(\beta)}(x) - f(x) \in V_\varepsilon \Rightarrow \Lambda\varphi_{h(\beta)} - \Lambda f(x) \in B_\varepsilon(0)$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \int_Q (\Lambda\varphi_\beta - \Lambda f) d\mu \right| &\leq \int_Q |\Lambda\varphi_\beta - \Lambda f| \, d\mu \\ &\leq \int_Q \frac{\varepsilon}{2} d\mu \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_Q 1 d\mu = \frac{\varepsilon}{2}\mu(Q) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Seja $\beta_0 \in J$ com $\beta_0 \geq \beta_1$ e $\beta_0 \geq \beta_2$. Então, se $\beta \geq \beta_0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\Lambda y - \int_Q \Lambda f d\mu\right| &= \left|\Lambda y - \int_Q \Lambda\varphi_\beta d\mu + \int_Q \Lambda\varphi_\beta d\mu - \int_Q \Lambda f d\mu\right| \\
&= \left|\Lambda y - \Lambda\int_Q \varphi_\beta d\mu + \int_Q (\Lambda\varphi_\beta - \Lambda f) d\mu\right| \\
&= \left|\Lambda y - \Lambda y_\beta + \int_Q (\Lambda\varphi_\beta - \Lambda f) d\mu\right| \\
&\le |\Lambda y - \Lambda y_\beta| + \left|\int_Q (\Lambda\varphi_\beta - \Lambda f) d\mu\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu$$

Como $\Lambda \in X'$ é arbitrário e X' separa pontos de X, segue que

$$y = \int_Q f d\mu$$

(b) Suponha que $\mu(A) \neq 1$. Seja ν uma medida sobre Q tal que, para todo $A \subset Q$ mensurável,

$$\nu(A) = \frac{1}{\mu(Q)}\mu(A)$$

Então ν é uma medida de probabilidade sobre Q.

Logo, pelo item (a), existe $z \in \overline{H}$ tal que

$$z = \int_Q f d\nu$$

Seja

$$y = \frac{1}{\mu(Q)} z$$

Então $y \in \mu(Q)\overline{H}$ e

$$y = \frac{1}{\mu(Q)} z = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\nu = \frac{1}{\mu(Q)} \left(\mu(Q)\int_Q f d\mu\right) = \int_Q f d\mu$$

$\square$

Corolário 1. *Seja X um espaço de Fréchet. Seja μ uma medida de Borel sobre um espaço topológico Hausdorff e compacto Q tal que $0 < \mu(Q) < \infty$.*

Sejam $f : Q \to X$ contínua e $H = Conv(f(Q))$. Então existe a integral de f:

$$y = \int_Q f d\mu$$

e $y \in \mu(Q)\overline{H}$.

Demonstração. X é Fréchet, então X' separa pontos de X.

Como Q é compacto, f é contínua e X é Fréchet, então $H = Conv(f(Q))$ é relativamente compacto. Logo, podemos aplicar o Teorema 1. $\square$

3 Funções Holomorfas

Definição 3. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Seja X um espaço vetorial topológico.*

(a) A função $f : \Omega \longrightarrow X$ é dita fracamente holomorfa em Ω se Λf é holomorfa no sentido usual para cada $\Lambda \in X'$.

(b) A função $f : \Omega \longrightarrow X$ é dita fortemente holomorfa em Ω se o limite

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existe para todo $z \in \Omega$.

Note que o quociente $\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ é o produto do escalar $w-z \in \mathbb{C}$ pelo vetor $f(w)-f(z) \in X$.

Proposição 3. *Toda função fortemente holomorfa é fracamente holomorfa.*

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial topológico, Ω um aberto em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \longrightarrow X$ uma função fortemente holomorfa. Seja $\Lambda \in X'$.

Dado $z \in \Omega$, o limite

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existe. Como Λ é contínua e linear, vale

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\right) &= \lim_{w \to z} \Lambda\left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z}\right) \\ &= \lim_{w \to z} \frac{\Lambda(f(w)) - \Lambda(f(z))}{w - z} \\ &= \lim_{w \to z} \frac{(\Lambda f)(w) - (\Lambda f)(z)}{w - z}\end{aligned}$$

Como $z \in \Omega$ é arbitrário, Λf é holomorfa. Como Λ é arbitrário, f é fracamente holomorfa.

□

Lema 3. *Seja $\Omega, K \subset \mathbb{C}$, tais que Ω é aberto, K é compacto e $0 \in \Omega$.*

Seja $\alpha : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua na topologia produto.

Se

$$\alpha(0, \eta) = 0, \forall \eta \in K$$

então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall z \in \Omega, |z| < \delta \Rightarrow (\forall \eta \in K, |\alpha(z, \eta)| < \varepsilon)$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, $\alpha^{-1}(B_\varepsilon(0))$ é aberto e contém $\{0\} \times K$.

Seja $\eta \in K$. Então $(0, \eta) \in \alpha^{-1}(B_\varepsilon(0))$.

Como os abertos de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ são gerados por produtos cartesianos de abertos em $\mathbb{C}$, existem $r, s > 0$ tais que

$$B_r(0) \times (B_s(\eta) \cap K) \subset \alpha^{-1}(B_\varepsilon(0))$$

Definindo $\delta_\eta = \min\{r, s\}$, temos

$$(0, \eta) \in B_{\delta_\eta}(0) \times (B_{\delta_\eta}(\eta) \cap K) \tag{2}$$

Logo, é possível definir δ_η para todo $\eta \in K$, de forma que (2) seja satisfeita. Assim,

$$\{0\} \times K \subset \bigcup_{\eta \in K} B_{\delta_\eta}(0) \times (B_{\delta_\eta}(\eta) \cap K) \subset \bigcup_{\eta \in K} B_{\delta_\eta}(0) \times B_{\delta_\eta}(\eta)$$

Mas $\{0\} \times K$ é compacto, então existem $\eta_1, \ldots, \eta_n \in K$ tais que

$$\{0\} \times K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\delta_{\eta_j}}(0) \times B_{\delta_{\eta_j}}(\eta_j)$$

Seja $\delta = \min\{\delta_{\eta_j} : j = 1, \ldots, n\}$. Seja $z \in \Omega$ com $|z| < \delta$. Dado $\eta \in K$,

$$\begin{aligned}
&(z, \eta) \in B_{\delta_{\eta_j}}(0) \times (B_{\delta_{\eta_j}}(\eta_j) \cap K) \qquad\qquad \text{para algum } j \in \{1, \ldots, n\} \\
\Rightarrow &(z, n) \in \alpha^{-1}(B_\varepsilon(0)) \\
\Rightarrow &|\alpha(z, \eta)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e seja X um espaço de Fréchet complexo. Se $f : \Omega \longrightarrow X$ é fracamente holomorfa, então:*

(a) f é fortemente contínua em Ω.

(b) O teorema de Cauchy e a fórmula de Cauchy valem: Se Γ é um caminho fechado em Ω tal que $Ind_\Gamma(w) = 0$ para cada $w \notin \Omega$, então

$$\int_\Gamma f(\zeta) d\zeta = 0 \tag{3}$$

e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) d\zeta \tag{4}$$

se $z \in \Omega$ *e* $Ind_\Gamma(z) = 1$. *Se* Γ_1 *e* Γ_2 *são caminhos fechados em* Ω *tais que*

$$Ind_{\Gamma_1}(w) = Ind_{\Gamma_2}(w)$$

para qualquer $w \notin \Omega$, *então*

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta) d\zeta \tag{5}$$

(c) f *é fortemente holomorfa em* Ω.

Demonstração. (a) Assumindo que $0 \in \Omega$, vamos provar que f é fortemente contínua em 0.

Definindo, para todo $r > 0$, $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, escolha r de modo que $\Delta_{2r} \subset \Omega$.

Seja $\Lambda \in X'$. Como Λf é holomorfa, temos, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z| < 2r$, aplicando a fórmula integral de Cauchy o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\frac{(\Lambda f)(z) - (\Lambda f)(0)}{z} &= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - z)^{-1}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-1}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta\right] \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta - \int_\Gamma \frac{1}{\zeta}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta\right] \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)(\Lambda f)(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\cancel{\zeta} - \cancel{\zeta} + z}{(\zeta - z)\zeta}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\cancel{z}}\frac{\cancel{z}}{(\zeta - z)\zeta}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(\zeta - z)\zeta}(\Lambda f)(\zeta) d\zeta
\end{aligned}$$

$$\frac{(\Lambda f)(z) - (\Lambda f)(0)}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\Lambda f)(\zeta)}{(\zeta - z)\zeta} d\zeta$$

onde Γ é a fronteira de Δ_{2r} orientada positivamente.

Seja

$$M(\Lambda) = \max_{x \in \Delta_{2r}} |(\Lambda f)(x)|$$

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $0 < |z| \leq r$. Seja Γ a fronteira de Δ_r orientada positivamente. Então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(\Lambda f)(z) - (\Lambda f)(0)}{z}\right| &= \left|z^{-1}\Lambda\left[f(z) - f(0)\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\Lambda f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|\Lambda f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} M(\Lambda)\int_\Gamma \frac{1}{|\zeta - z|} d\zeta \\
&\leq r^{-1}M(\Lambda)
\end{aligned}$$

Então o conjunto

$$\left\{\frac{f(z) - f(0)}{z} : 0 < |z| \leq r\right\}$$

é fracamente limitado em X.

Então o conjunto é fortemente limitado em X. Assim, se V é uma vizinhança da origem, existe $t < \infty$ tal que, para $0 < |z| \leq r$:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} \in tV \Rightarrow f(z) - f(0) \in ztV$$

Então $f(z) \longrightarrow f(0)$ fortemente quanto $z \longrightarrow 0$.

(b) Seja Γ um caminho fechado em Ω. Então sua imagem é limitada em $\mathbb{C}$. Logo, a envoltória convexa da imagem de Γ possui fecho compacto. Portanto, pelo Teorema 1

$$\int_\Gamma f(z) d\zeta$$

existe. Assim,

(i) Suponha que $Ind_\Gamma(w) = 0$ para todo $w \notin \Omega$. Seja $\Lambda \in X'$. Como Λf é holomorfa, temos

$$\int_\Gamma (\Lambda f)(\zeta) d\zeta = 0$$

Então

$$\int_\Gamma f(\zeta) d\zeta = 0$$

pela unicidade da integral de f.

(ii) Suponha que $Ind_\Gamma(w) = 1$ para todo $w \notin \Omega$. Então

$$\forall \Lambda \in X', (\Lambda f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} (\Lambda f)(\zeta) d\zeta$$

Então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) d\zeta$$

(iii) Seja $z \in \Omega$ tal que $Ind_\Gamma(z) = 1$. Se Γ_1 e Γ_2 são caminhos fechados tais que

$$Ind_{\Gamma_1}(w) = Ind_{\Gamma_2}(w)$$

para todo $w \notin \Omega$, então, para todo $\Lambda \in X'$,

$$\int_{\Gamma_1} (\Lambda f)(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} (\Lambda f)(\zeta) d\zeta$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta) d\zeta$$

(c) Por simplicidade, vamos assumir que $0 \in \Omega$ e iremos demonstrar que

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

existe.

Seja $r > 0$ tal que $\Delta_{2r} \subset \Omega$. Seja Γ a fronteira de Δ_{2r} orientada no sentido anti-horário.

Defina

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-2} f(\zeta) d\zeta \tag{6}$$

Note que y está bem definido, pois a função $\zeta \mapsto (2\pi i)^{-1} \zeta^{-2}$ é contínua em $\Delta_{2r} \setminus \Delta_r$. Então podemos aplicar o Teorema 1.

Queremos mostrar que

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = y$$

Observe que escolhemos y inspirados no seguinte resultado de funções analíticas:

$$f \text{ analítica } \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Pelo item (b), para todo $z \in \Delta_{2r}$, temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) d\zeta$$
$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-1} f(\zeta) d\zeta$$

Então, se $z \in \Delta_{2r}$ e $z \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(0)}{z} &= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - z)^{-1} f(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-1} f(\zeta)d\zeta\right] \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} f(\zeta)d\zeta - \int_\Gamma \frac{1}{\zeta} f(\zeta)d\zeta\right] \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\cancel{\zeta} - \cancel{\zeta} + z}{(\zeta - z)\zeta} f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\cancel{z}}\frac{\cancel{z}}{(\zeta - z)\zeta} f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(\zeta - z)\zeta} f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{(\zeta - z)\zeta}\right] f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{\zeta^2} + \frac{-(\zeta - z)\zeta + \zeta^2}{\zeta^2(\zeta - z)\zeta}\right] f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{\zeta^2} + \frac{-\cancel{\zeta^2} + z\zeta + \cancel{\zeta^2}}{\zeta^2(\zeta - z)\zeta}\right] f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{\zeta^2} + \frac{z\cancel{\zeta}}{\zeta^2(\zeta - z)\cancel{\zeta}}\right] f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta^2} f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} f(\zeta)d\zeta \\
&= y + g(z)
\end{aligned}$$

onde definimos $g : \Delta_{2r} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} f(\zeta)d\zeta$$

Como $\partial\Delta_{2r}$ é compacto e a função $\alpha : \text{int}\Delta_{2r} \times \partial\Delta_{2r} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\alpha(z,\zeta) = \frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} f(\zeta)$$

é tal que $\alpha(0,\zeta) = 0$ para todo $\zeta \in \partial\Delta_{2r}$, então, pelo Lema 3, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z| < \delta \Rightarrow \forall \zeta \in \partial\Delta_{2r}, \left|\frac{zf(\zeta)}{\zeta^2(\zeta - z)}\right| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

Então, se $|z| < \delta$

$$\begin{aligned}
|g(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} f(\zeta) d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left|\frac{z}{\zeta^2(\zeta - z)} f(\zeta)\right| |d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\varepsilon}{2r} |d\zeta| \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{2r} 2\pi 2r = \varepsilon
\end{aligned}$$

Logo $g(z) \longrightarrow 0$ quando $z \longrightarrow 0$.

Assim,

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} \longrightarrow y \quad \text{quando } z \longrightarrow 0$$

Portanto, f é fortemente holomorfa.

$\square$

Observação 2. *Sejam X um espaço de Montel complexo e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto. Para mostrar que $f : X \longrightarrow \Omega$ é fortemente contínua em Ω, basta mostrar que f é fracamente contínua, pois num espaço de Montel toda função fracamente contínua é fortemente contínua.*

Teorema 3. *Seja X um espaço vetorial topológico tal que X' separa pontos de X. Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ fracamente holomorfa com imagem fracamente limitada em X. Então f é constante.*

Demonstração. Dado $\Lambda \in X'$, Λf é uma função holomorfa no sentido usual e limitada. Seja $z \in \mathbb{C}$. Então, pelo Teorema de Liouville,

$$\Lambda f(z) = \Lambda f(0)$$

Como X' separa pontos de X, segue que $f(z) = f(0)$. Portanto f é constante. $\square$

Appendices

A Alguns resultados de funções analíticas

Teorema 4. *(**Fórmula Integral de Cauchy**) Sejam Ω aberto conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e $\Gamma : [0,1] \to \Omega$ uma curva fechada em Ω e C^1 por partes . Se $a \in \Omega \setminus Im(\Gamma)$ Então,*

$$f(a)Ind_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Teorema 5. *(**Fórmula Integral de Cauchy para derivadas**) Sejam Ω aberto conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e $\Gamma : [0,1] \to \Omega$ uma curva fechada em Ω e C^1 por partes . Se $a \in \Omega \setminus Im(\Gamma)$ Então,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+1}}dz.$$

Teorema 6. *(**Teorema de Cauchy-Goursat**) Sejam Ω aberto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Seja Δ um triângulo convexo e fechado contido em Ω. Então,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Teorema 7. *(**Teorema de Cauchy**) Sejam Ω aberto e simplesmemnte conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e η uma curva fechada em Ω e C^1 por partes . Então,*

$$\int_\eta f(w)dw = 0.$$

Teorema 8. *(**Teorema de Liouville**)Toda função inteira e limitada é constante*

Referências

[1] Yosida, Kosaku. "Functional analysis."

[2] Rudin, Walter. "Functional Analysis. 1991."

[3] Lavrentovich, Maxim O. "Measure, Integrals, and Transformations: Lebesgue Integration and the Ergodic Theorem". 2007. Disponível em `http://documents.kenyon.edu/math/LavrentovichSenEx2007.pdf`.

[4] Ávila, Geraldo. Variáveis complexas e aplicações. LTC, 2008.

[5] Treves, François. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels: Pure and Applied Mathematics. Vol. 25. Elsevier, 2016.