Álgebras de Fréchet

Guilherme Scabin Vicinansa
Max Reinhold Jahnke

31 de julho de 2017

Capítulo 1

Álgebras de Fréchet

1.1 Introdução

O texto a seguir, cuja principal fonte desse trabalho é o livro [1] de Goldmann, foi preparado para um seminário para a disciplina "Espaços localmente convexos e aplicações" ministrada no primeiro semestre de 2017 pelo Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro.

O objetivo é apresentar alguns resultados fundamentais da teoria de álgebras de Fréchet relacionados com análise espectral e também dar uma caracterização de álgebras de Fréchet usando álgebras de Banach.

1.2 Preliminares

Nesse texto, vamos sempre considerar uma álgebra associativa, comutativa e com unidade A sobre o corpo dos números complexos.

Definição 1. *Uma* álgebra de Banach *é uma álgebra A que também um espaço de Banach e satisfaz*

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\| \quad \forall f, g \in A \text{ e } \|1\| = 1.$$

Exemplo 1. *Seja K um compacto Hausdorff não vazio. O conjunto $C(K)$ de todas as funções contínuas em K a valores complexos é uma álgebra de Banach se munido da norma do supremo*

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in C(K).$$

Definição 2. *Seja A uma álgebra. Uma seminorma $p : A \to [0, \infty)$ é dita* multiplicativa *se*

$$p(xy) \leq p(x)p(y) \quad \forall x, y \in A.$$

Definição 3. *Um subconjunto $U \subset A$ é dito multiplicativo se $UU \subset U$.*

Definição 4. *Uma* álgebra topológica *é uma álgebra A que é um espaço vetorial topológico tal que a multiplicação*

$$(a, b) \in A \times A \mapsto ab \in A$$

é uma aplicação contínua.

Definição 5. *Uma álgebra topológica é dita* localmente multiplicativamente convexa *se existe uma base de vizinhanças da origem que são multiplicativas e convexas.*

Definição 6. *Uma álgebra localmente multiplicativamente convexa é chamada de álgebra de Fréchet se é metrizável e completa.*

Exemplo 2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ *um aberto e* $\mathcal{O}(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções holomorfas em* Ω*. Para cada compacto* $K \subset \Omega$ *temos que*

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega),$$

é uma família de seminormas para $\mathcal{O}(\Omega)$*. Com a família de seminormas* $\|\cdot\|_K$*, o conjunto* $\mathcal{O}(\Omega)$ *é uma álgebra de Fréchet.*

Seja A uma álgebra de Fréchet e escolhemos uma família de seminormas $\{p_n\}_n$. A partir daqui, sempre assumimos que $p_n \leq p_{n+1}$ para todo n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o ideal

$$I_n = \ker p_n = \{a \in A : p_n(a) = 0\}$$

e denotamos por A_n o completamento da álgebra A/I_n com respeito à norma

$$p'_n(a + I_n) = p_n(a).$$

Então A_n é uma álgebra de Banach por definição. Note que A_n possui uma identidade pois A possui uma identidade.

1.3 Teorema de Arens-Michael

Nesta seção é apresentada uma caracterização de álgebras de Fréchet como um limite projetivo de álgebras de Banach. Essa caracterização é útil pois ela permite que vários resultados de álgebras de Banach sejam adaptados para álgebras de Fréchet.

Começaremos essa seção introduzindo o conceito de limite projetivo.

Definição 7. *Seja* $\{E_n, d_n\}$ *uma sequência de espaços métricos e assuma que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenhamos uma aplicação contínua*

$$\varphi_n : E_{n+1} \to E_n.$$

Dizemos que essa sequência constitui um sistema projetivo de espaços métricos

$$\cdots \to E_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} E_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots$$

Se $\varphi_n(E_{n+1})$ *é denso em* E_n *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então falamos que a sequência constitui um* sistema projetivo denso*.*

Definição 8. *O subconjunto*

$$\varprojlim E_n = \{(f_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n : \varphi_n(f_{n+1}) = f_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

munido da topologia relativa da topologia produto é chamado de limite projetivo de um sistema projetivo*.*

Lema 1. *Seja* $\varprojlim E_n$ *o limite projetivo de um sistema projetivo denso*

$$\cdots \to E_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} E_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots$$

de espaços métricos completos. Nessas condições, a aplicação

$$(f_n) \in \varprojlim E_n \xmapsto{\pi_k} f_k \in E_k$$

possui imagem densa para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 1. *Esse lema é usualmente chamado de versão abstrata do teorema de Mittag-Leffler. De fato, o teorema clássico de Mittag-Leffler para funções meromorfas e o teorema da categoria de Baire podem ser deduzidos dele.*

Agora consideramos o sistema projetivo denso

$$\cdots \to B_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots$$

em que cada B_n é uma álgebra de Banach com norma $\|\|_n$ e cada φ_n é um homomorfismo contínuo de álgebras de Banach.

O conjunto $\prod B_n$ munido de operações algébricas definidas coordenada por coordenada é uma álgebra. A topologia de $\prod B_n$ é gerada por uma família de seminormas multiplicativas

$$p_k^*((f_n)) = \max \|f_j\|_j : j \leq k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como o produto de espaços completos é completo, temos que $\prod B_n$ é uma álgebra de Fréchet.

Lema 2. *O conjunto* $\varprojlim B_n$ *é um subespaço fechado de* $\prod B_n$.

Uma consequência do lema anterior é que $\varprojlim B_n$ é uma álgebra de Fréchet.

Seja $(f_n) \in \varprojlim B_n = A$. Para $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ tal que

$$\|f_k\|_k \leq p_k^*((f_n)) \leq C_k \|f_k\|_k$$

pois cada φ_l é contínua e

$$\|f_{k-i}\|_{k-i} = \|\varphi_{k-l} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}(f_k)\|_{k-1}, \quad i = 1, \ldots, k-1.$$

Portanto as semi-normas

$$p_k((f_n)) = \|f_k\|_k$$

definem uma topologia equivalente em $A = \varprojlim B_n$.

Seja $I_k = \{(f_n) \in A : p_k((f)) = 0\}$ e denotemos por A_k o completamento de A/I_k com respeito a norma

$$p_k'((f_n) + I_k) = p_k((f_n)) = \|f_k\|_k.$$

A aplicação

$$(f_n) + I_k \in A/I_k \xrightarrow{T} f_k \in B_k$$

é injetiva e um homomorfismo de álgebras contínuo. Pelo Lema 1, a aplicação T possui imagem densa e portanto pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras topológico

$$\tilde{T} : A_k \to B_k.$$

De fato, podemos identificar A/I_k com um subespaço de A_k e se $a \in A_k$ então existe uma sequência $\{a_j\} \subset A/I_k$ convergingo para a em A_k. Como T é contínua, temos que $\{T(a_j)\}$ é uma sequência de Cauchy e assim existe o limite $\lim_j T(a_j)$. Note que se $\{b_j\} \subset A/I_k$ é outra sequência convergindo para a, então $a_j - b_j \to 0$ e por continuidade e linearidade temos que $T(b_j - a_j) \to 0$ o que implica que $\lim_j T(b_j) = \lim_j T(a_j)$. Podemos então definir $\tilde{T}(a) = \lim_j T(a_j)$. Por definição, essa aplicação é contínua, além disso é fácil de verificar que ela é também linear.

Teorema 1. *Seja*

$$\cdots \to B_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} B_{n-1} \to \cdots$$

um sistema projetivo denso de álgebras de Banach. Então $A = \varprojlim B_n$ é uma álgebra de Fréchet.

Demonstração. Segue da discussão acima que $A = \varprojlim B_n$ é uma álgebra de Fréchet. □

Provamos anteriormente que $A = \varprojlim B_n$ é uma álgebra de Fréchet se

$$\cdots \to B_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} B_{n-1} \to \cdots$$

é um limite projetivo de sistema projetivo denso. Agora queremos mostrar que toda álgebra de Fréchet pode ser escrita dessa maneira.

Seja A uma álgebra de Fréchet e considere a sequência de seminormas $\{p_n\}_n$. Como feito anteriormente, consideramos A_n o completamento de $A'_n \doteq A/\ker p_n$ com respeito à norma $p'(f + \ker p_n) = p_n(f)$, identificamos A'_n com um subespaço de A_n e denotamos por π_n a aplicação canônica

$$f \in A \mapsto f + \ker p_n.$$

Para $m \geq n$ definimos

$$\pi'_{m,n} : A_m \to A_n$$

como a aplicação

$$f + \ker p_m \in A/\ker p_m \mapsto f + \ker p_n \in A/\ker p_n$$

e por

$$\pi_{m,n} : A_m \to A_n$$

a extensão contínua de $\pi'_{m,n}$

Temos que $\pi'_{m,n}$, π_n e $\pi_{m,n}$ estão bem definidas e são homomorfismos contínuos de álgebras que possuem imagem densa e, além disso,

$$p'_n(\pi_{m,n}(f)) \leq p'_m(f) \quad \forall f \in A_m \tag{1.1}$$

pois $p_n \leq p_m$.

Consideramos o seguinte sistema projetivo denso de álgebras de Banach

$$\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1,n}} A_n \to \cdots$$

e também o seguinte sistema projetivo denso de espaços normados

$$\cdots \to A'_{n+1} \xrightarrow{\pi'_{n+1,n}} A'_n \to \cdots .$$

Note que como identificamos A'_n com um subespaço de A_n temos que $\varprojlim A'_n \subset \varprojlim A_n$. Consideremos a seguinte aplicação

$$f \in A \mapsto T'(f) = (\pi_n(f))_n \in \varprojlim A'_n.$$

Temos que T' é homomorfismos de álgebras e é uma bijeção. De fato, se $T'(f) = 0$ então $\pi_n(f) = 0$ para todo n e isso significa que $p_n(f) = 0$ para todo n e portanto $f = 0$ em A. Por outro lado, dado $(f_n)_n \in \varprojlim A'_n$ temos que $\pi'_{n+1,n}(f_{n+1}) = f_n$, isto é $f_{n+1} - f_n \in \ker p_n$ e iterando o argumento, para $m \geq n$, temos $f_m - f_n \in \ker p_n$ e então existe $f = \lim f_n$ que satisfaz $T'(f) = (f_n)_n \in \varprojlim A'_n$ e T' é sobrejetora.

Segue do Teorema da Aplicação Aberta que T' é um isomorfismo topológico e portanto $\varprojlim A'_n$ é completo. Segue diretamente do Lema 1 que a aplicação T' tem imagem densa e portanto $\varprojlim A'_n$ é denso em $\varprojlim A_n$. Logo $\varprojlim A'_n$ é fechado e denso em $\varprojlim A_n$ e portanto a imagem de T' é $\varprojlim A_n$.

Reunindo o que obtemos acima temos o seguinte resultado:

Teorema 2. *As afirmações a seguir são equivalentes para uma álgebra A:*

1. *A álgebra A é uma álgebra de Fréchet;*

2. *A álgebra A é um limite projetivo de um sistema denso projetivo de álgebras de Banach.*

1.4 Noções da Teoria Espectral das Álgebras de Fréchet

Definição 9. *Seja A uma álgebra de Fréchet.*

1. *Denotamos por $S(A)$ o conjunto de todos os homomorfismos não nulos com valores nos números complexos e denotamos por $M(A)$ o conjunto de todos os elementos contínuos de $S(A)$. Chamamos $M(A)$ de espectro de A.*

2. *Para $f \in A$, definimos a função*

$$\varphi \in S(A) \mapsto \hat{f}(\varphi) = \varphi(f).$$

A função $\hat{f}$ é chamada de transformada de Gelfand de f. Definimos

$$\hat{A} = \hat{f}|_{M(A)} : f \in A.$$

3. *Sempre munimos $S(A)$ e $M(A)$ com a topologia fraca, isto é, a menor topologia que faz com que a transformadas de Gelfand sejam funções contínuas em $S(A)$ e $M(A)$. Essa topologia é chamada de topologia de Gelfand.*

Definição 10. *Um espaço Hausdorff é chamado de* hemicompacto *se existe uma exaustão enumerável por compactos*

$$\cdots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \cdots$$

de X tal que para cada compacto K existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$. Chamamos tal exaustão de admissível.

Seja A_n o completamento de A/I_n com respeito à norma $p'_n(a+I_n) = p_n(a)$ [1]. Assim, A_n é uma álgebra de Banach com unidade. Mostraremos agora que o espectro da álgebra de Fréchet é σ-compacto.

Proposição 1. *O espectro de uma álgebra de Frechét é σ-compacto.*

- Considere as projeções
$$\pi_n : A \to A_n, \quad a \to a + I_n \tag{1.2}$$
Então, para cada n, π_n é um homomorfismo contínuo com imagem densa [2]. Assim, a transposta π_n^* é contínua e injetiva. Sabemos que $M(A_n)$ é não vazio e compacto, por ser o espectro de uma álgebra de Banach. Assim,
$$\pi_n^* : M(A_n) \to \pi_n^* M(A_n) \subset M(A) \tag{1.3}$$
é um homeomorfismo. Portanto $\pi_n^*(M(A_n))$ é compacto para todo n.

- Queremos mostrar que dado qualquer $\varphi \in M(A)$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $\bar{\varphi}$ tal que $\pi_n^*(\bar{\varphi}) = \varphi$. Note que para qualquer $\varphi \in M(A)$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que:
$$|\varphi(f)| \leq p_n(f), \quad \forall f \in A$$
(da continuidade). Daí segue que, se definirmos
$$\tilde{\varphi} : A/I_n \to \mathbb{C}, \quad f + I_n \to \varphi(f)$$
temos que $\tilde{\varphi}$ é um homomorfismo algébrico contínuo em A/I_n. Seja $\bar{\varphi}$ a única extensão contínua de $\tilde{\varphi}$ em A_n (logo $\bar{\varphi} \in M(A_n)$), temos o desejado.
Daqui concluímos que:
$$M(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^*(M(A_n))$$

- Queremos mostrar que, qualquer que seja n, se $\varphi \in M(A_n)$, então $\pi_n^*(\varphi) \in M(A)$. Qualquer que seja $f \in A$:
$$|\pi_n^*(\varphi)(f)| = |\varphi \circ \pi_n(f)| \leq p'_n(f + I_n) = p_n(f) \tag{1.4}$$

[1] norma, pois $p'(a + I_n) = 0 \iff a + I_n \in I_n$, logo $a_n \in I_n$.

[2] A projeção no caso não é necessariamete sobrejetora, pois tomamos o completamento do quociente. A continuidade segue trivialmente

$$\pi_n^*(M(A_n)) = \{\varphi \in M(A) : |\varphi(f)| \leq p_n(f), \quad \forall f \in A\}$$

Note que de (1.4), temos

$$\pi_n^*(M(A_n)) \subset \pi_m^*(M(A_m))$$

para $m \geq n$[3].

O que conclui a prova.

Corolário 1. *O espectro de uma álgebra de Fréchet nunca é vazio*

Demonstração. $M(A_1)$ é não vazio, pois é o espectro de uma álgebra de Banach. □

Sabemos então que $M(A)$ é σ-compacto. Vamos mostrar agora que ele é de fato hemicompacto.

Teorema 3. *Seja A uma álgebra de Fréchet e seja A_n definido como anteriormente. Então, de uma maneira natural, vale que*

$$M(A) = \cup_{n \in \mathbb{N}} M(A_n)$$

e $(M(A_n))$ é uma exaustão admissível de $M(A)$, isto é, $M(A)$ é um espaço hemicompacto.

Vamos provar que $(M(A_n))$ é uma exaustão admissível de $M(A)$.

Seja $K \subset M(A)$ um conjunto compacto arbitrário. Para cada $\varphi \in K$, o conjunto $\{f \in A : \quad |\varphi(f)| \leq 1\}$ é fechado. Assim, o conjunto

$$K^o = \cap_{\varphi \in K} \{f \in A : \quad |\varphi(f)| \leq 1\} = \left\{f \in A : \quad ||\hat{f}||_K \leq 1\right\}$$

é fechado também.

Pela definição de topologia de Gelfand, toda transformada de Gelfand $\hat{f}$ é contínua em $M(A)$, logo limitada em K. Portanto:

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} nK^o$$

Pelo teorema de Baire e pelo fato de que A tem interior não vazio, $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que nK^o tem interior não vazio. Consequentemente K^o tem interior não vazio. Podemos então escolher k natural, $\epsilon > 0$ e $g \in K^o$, tais que:

$$\{f \in A : \quad p_k(f - g) < \epsilon\} \subset K^o$$

Seja $h \in A$ tal que $p_k(h) \neq 0$, e seja $\varphi \in K$, então vamos mostrar que $\varphi \in M(A_k)$

$$g + (\epsilon h/(2p_k(h))) \in K^o$$

Logo,

$$\varphi(g + (\epsilon h/(2p_k(h)))) \leq 1$$

Daí, como $|\varphi(g)| \leq 1$

$$\varphi(h) \leq 4p_k(h)/\epsilon$$

Se $p_k(h) = 0$, então $g + ch \in K^o$, para todo $c > 0$, portanto $|\varphi(h)| \leq 2/c$, o que implica $0 = |\varphi(h)| = p_k(h)$ Assim, concluímos que $\varphi \in M(A_k)$.

[3]Pois $p_n \leq p_{n+1}$

Teorema 4 (Gelfand-Mazur)**.** *Se A é uma álgebra de Fréchet que é um corpo, então $A \cong \mathbb{C}$.*

Demonstração. Os múltiplos complexos da identidade formam uma subálgebra de A isomorfa a $\mathbb{C}$. Logo, basta mostrar que todo $f \in A$ é um múltiplo complexo da identidade. Seja $f \in A$. Sabemos que $M(A)$ não é vazio pelo Corolário 1. Suponha que exista $\varphi \in M(A)$, tal que $f - \varphi(f)1$ não seja invertível. Mas A é um corpo, logo $f - \varphi(f)1 = 0$, pois φ é um homomorfismo algébrico entre corpos e chegamos a uma contradição. Assim, $f = \varphi(f)1$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Helmut Goldmann. *Uniform Fréchet algebras*, volume 162. Elsevier, 1990.