Existência de inversas à direita de operadores em espaços de Fréchet

Espaços Localmente Convexos
Professor: Paulo Domingos Cordaro

Breno Raphaldini, Rafael Cizeski Nitchai

September 4, 2017

Resumo: Neste trabalho mostrarêmos a existência de inversa à direita para operadores lineares contínuos entre espaços de Banach. Mostrarêmos ainda que para uma importante classe de operadores diferenciais, que incluí os operadores elípticos, esta inversa não é linear.

1 Existência de inversa à direita de aplicações entre espaços de Fréchet

A seção a seguir tem como objetivo principal demonstrar que um mapa linear sobrejetor entre espaços de Fréchet, sempre possui inversa a direita contínua, mas que essa inversa não é necessariamente linear.

Este resultado e todos os passos intermediários que venham a ser utilizados podem ser encontrados em [*Bourbaki*(1987)], ou, caso sejam apresentados em forma de Lema, foram demonstrados em sala de aula ao decorrer do curso.

Lema 1. *Seja E um espaço localmente convexo metrizável. A topologia de E pode ser definida por uma distância invariante sob translações, para a qual as bolas abertas são convexas.*

Proposição 1. *Seja d uma métrica invariante pela esquerda que define uma topologia em um grupo topológico metrizável G, e H um subgrupo normal e fechado de G. Se X e Y são dois pontos de G/H, então a distância $d(X,Y)$ entre os dois subconjuntos fechados X, Y em G é uma métrica invariante pela esquerda em G/H e define uma topologia neste espaço quociente.*

Primeiramente, iremos demonstrar que d é, de fato, métrica. Para isso, note que se $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \inf_{x' \in X, y' \in Y} d(x', y') \\ &= \inf_{\alpha, \beta \in H} d(\alpha x, \beta y) \\ &= \inf_{h \in H} d(x, hy) = d(x, Hy). \end{aligned}$$

Então, para qualquer $Z \in G/H$, temos que

$$|d(X,Z) - d(Y,Z)| = |d(x,Z) - d(y,Z)| \leqslant d(x,y).$$

Como isso vale para qualquer $x \in X$ e $y \in Y$, concluímos que

$$|d(X,Z) - d(Y,Z)| \leqslant d(X,Y).$$

Portanto, d é métrica em G/H. Assim para qualquer $Z \in G/H$, temos

$$\begin{aligned} d(ZX, ZY) &= \inf_{h \in H} d(zx, hzy) \\ &= \inf_{h \in H} d(zx, z(z^{-1}hz)y). \end{aligned}$$

Mas como H é normal, então quando h percorre H, $z^{-1}hz$ também percorre H. Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned} d(ZX, ZY) &= d(zx, zHy) \\ &= d(x, Hy) = d(X,Y). \end{aligned}$$

Finalmente, resta mostrar que d define uma topologia em G/H. De fato, se V é uma vizinhança de $e \in G$, definida por $V = \{x \in G;\ d(e,x) < \epsilon\}$, então a imagem de V pela aplicação canônica em G/H é dada por

$$\Pi(V) = \{\dot{x} \in G/H;\ d(\dot{e}, \dot{x}) < \epsilon\},$$

que é uma vizinhança da identidade $\dot{e}$ em G/H. Portanto, d define uma topologia em G/H.

Definição 1. *Um homomorfismo contínuo sobrejetor f, entre os grupos topológicos G e $G\prime$ é chamado morfismo estrito de G em G' se o homomorfismo bijetor $f^{\#}$ de $G/f^{-1}(e')$ em G', associado com f, é um isomorfismo entre grupos topológicos.*

Teorema 1. *Sejam E e F espaços vetoriais metrizáveis sobre um anel de divisão não discreto K, e u um mapa linear contínuo e sobrejetor de E em F. Suponha que E é completo. Então se F também é completo, u é um morfismo estrito.*

Definição 2. *Uma partição da unidade contínua em um espaço topológico X é uma família $(f_i)_{i \in I} : X \to [0,1]$ de funções reais positivas e contínuas em X, cujos suportes formam uma família localmente finita tal que $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) = 1$.*

Proposição 2. *Sejam E e F dois espaços de Fréchet e u um mapa linear contínuo sobrejetor de E em F. Então existe uma inversa a direita de u que é contínua mas que não é necessariamente linear.*

Como vimos na Proposição 1, existe uma distância d em E, invariante sob translações, que define uma topologia em que as bolas abertas são convexas. Sendo assim, tomando $y, y\prime \in F$, definimos $\delta(y, y\prime)$ como a distância entre os conjuntos fechados $u^{-1}(y)$ e $u^{-1}(y\prime)$ de E.

Primeiramente, queremos mostrar que δ também define uma topologia em F. Para isso, tomamos a projeção canônica $\Pi : E \longrightarrow E/\mathrm{Ker}(u)$ e definimos $u^{\#}$ como a aplicação de $E/\mathrm{Ker}(u)$ em F induzida por u. Pelo Lema 3, d define uma topologia no espaço quociente $E/\mathrm{Ker}(u)$, sendo assim, vizinhanças da origem definidas por

$$V_\alpha = \{X \in E/\mathrm{Ker}(u);\ d(X,0) < \alpha\},$$

são levadas por $u^{\#}$ em conjuntos

$$\begin{aligned} u^{\#}(V_\alpha) &= \left\{y \in F;\ d(u^{-1}(y), u^{-1}(0))\right\} \\ &= \{y \in F;\ \delta(y, 0)\}, \end{aligned}$$

mas como pelo Teorema 1, u é um morfismo estrito e sendo assim, $u^{\#}$ é um isomorfismo. Logo $u^{\#}(V_\alpha)$ são vizinhanças da origem em F e portanto, conclui-se que δ de fato, define uma topologia em F.

Agora iremos construir por indução uma sequencia de funções contínuas $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F em E satisfazendo as seguintes desigualdades para qualquer $y \in F$:

$$\delta(y, u(s_n(y))) < 2^{-n}, \tag{1}$$

$$d(s_n(y), s_{n-1}(y)) < 2^{-n+1} \qquad \text{para } n \geqslant 1. \tag{2}$$

Suponha que $n = 0$, ou que $n \geqslant 1$ e que s_{n-1} esteja bem definida e satisfaça (1) e (2). Então, se $y_0 \in F$, como u é sobrejetora, $u^{-1}(y_0)$ é não-vazio e para o caso $n \geqslant 1$, pela hipótese de indução temos que

$$d(u^{-1}(y_0), u^{-1}(s_{n-1}(y_0))) \quad < \quad 2^{-n+1}. \tag{3}$$

Então existe $x_0 \in E$ tal que $u(x_0) = y_0$ e $d(x_0, s_{n-1}(y_0)) < 2^{-n+1}$. Mostraremos a existência de tal x_0: seja $x_* \in E$ tal que $u(x_*) = y_0$. Escrevemos $x_0 = x_* + z$, com $z \in \ker u$. Então

$$d(x_0, s_{n-1}(y_0)) = d(x_* + z, s_{n-1}(y_0)) = d(x_*, s_{n-1}(y_0) - z).$$

Agora $u^{-1}(s_{n-1}(y_0)) = s_{n-1}(y_0) + \ker u$ e portanto por (3) podemos determinar x_* e z tal que x_0 tem a propriedade requerida.

Mas como s_{n-1} é contínua, o conjunto $U \subset F$, definido por

$$U = \left\{y \in F;\ \delta(y, y_0) < 2^{-n} \text{ e } d(x_0, s_{n-1}(y)) < 2^{-n+1}\right\},$$

é uma vizinhança aberta de y_0. Assim, existe $V_{i(y_0)} \in U$ tal que, se definirmos $s_{n,i} : E \to F$ por $s_{n,i}(y) = x_0$, para to $y \in F$, teremos que $s_{n,i}$ restrito a $V_{i(y_0)}$ irá satisfazer (1) e (2).Construímos então $(V_i)_{i\in I}$ tal que $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} V_i$

Mas como F é metrizável, é paracompacto e portanto, existe uma partição da unidade contínua $(f_i)_{i\in I}$, localmente finita e subordinada à cobertura $(V_i)_{i\in I}$. Com isso, para cada $y \in F$ tomamos

$$S_n(y) = \sum_{i\in I} f_i(y), s_{n,i}(y).$$

Essa função é contínua; e como as bolas abertas sâo convexas em E e F, s_n satisfaz (1) e (2) para qualquer $y \in F$.

Finalmente, pela desigualdade (2) concluímos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma sequência de Cauchy em E. Como E é completo, essa sequência converge uniformemente para uma função contínua $s : E \to F$. Além disso, a desigualdade (1) nos mostra que $u \circ s = \mathrm{Id}_F$, portanto, u é inversa a direita de u.

2 Inexistência de inversa a direita linear para uma classe operadores diferenciais

O seguinte teorema é devido a Alexandre Grothendieck, seguimos a demonstração de [*Treves*(2006)]

Teorema: Seja D um operador diferencial linear definido numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

1. Para todo $\Omega' \subset \Omega$ aberto, se $D\phi = 0$ para toda distribuição ϕ em Ω' então ϕ é analítica real em Ω'.

2. D é sobrejetor de $C^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$.

3. Para todo $\Omega' \subset \Omega$ aberto existe $\Omega'' \subset \Omega'$ também aberto onde $D^T\phi = 0$ para alguma distribuição $\phi \in D'(\Omega'')$, tal que $\phi \neq 0$

Sob estas condições não existe uma inversa a direita linear e contínua para o operador diferencial D em $C^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Vamos supor por contradição que exista uma aplicação G definida em $C^\infty(\Omega)$ linear e contínua, tal que $D \circ G = I$, o operador identidade em $C^\infty(\Omega)$. Então para todo compacto $K \subset \Omega$ existe outro $K' \subset \Omega$, um inteiro $m \geqslant 0$ e um real positivo C tais que para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ vale:

$$\sup_{x \in K} |Gf(x)| \leqslant \sup_{x \in K'} \sum_{\alpha \leqslant m} |\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)| \tag{4}$$

De onde nota-se que se f se anula numa vizinhança de K' então Gfse anula em K. Tomemos então uma bola aberta $B_0 \subset (K \bigcup K')^c \bigcap \Omega_1$, onde Ω_1 é um subconjunto conexo de Ω tal que $\Omega_1 \bigcap Int(K) \neq \varnothing$. Então para toda $f \in C_c^\infty(B_0)$, vale $G(f) = 0$ em K, pois tomamos seu suporte B_0 fora de K. Mas $D(G(f)) = 0$ fora do suporte de $G(f)$, logo por (1) $G(f)$ é analítica em $\Omega_1 - suppf$.

Como$G$ é inversa a direita de F vale que para toda $f^\in C^\infty(B_0)$ vale $D(Gf) = f$, então $D(C^\infty(B_0)) = C^\infty(B_0)$. Pelo teorema do bipolar temos que $D^T : \mathcal{D}'(B_0) \to \mathcal{D}'(B_0)$ é injetora. Por (3) seja Ω'' um aberto de Ω no qual a equação $D^T\phi = 0$ para toda distribuição $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega'')$. Agora suponhamos que tenhamos escolhido $\Omega'' = B_0$ como em (3), podemos repetir o raciocínio anterior para qualquer $\Omega''' \subset \Omega''$ vale que $D^T : \mathcal{D}'(\Omega''') \to \mathcal{D}'(\Omega''')$ é injetora, contudo (3) afirma que existe uma distribuição $\phi \neq 0$ para a qual $D^T\phi = 0$, levando a uma contradição.

2.1 O operador laplaciano

O teorema acima é aplicável a todos operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes, além de outros operadores com coeficientes analíticos. Um caso particular de operador diferencial parcial linead com coeficientes constantes é o operador laplaciano:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{5}$$

Onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Vejamos porque Δ satisfaz o teorema acima:

Lembremo-nos da definição de $P(D)$ convexidade: Um aberto Ω é dito $P(D)$ convexo para um operador diferencial D, se para toda distribuição $\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e para todo $K \subset \Omega$ compacto tal que $suppD^T\mu \subset K$ existe outro compacto $K' \subset \Omega$ tal que $supp\mu \subset K'$.

(A) O transponto do operador laplaciano $\Delta^T = -\Delta$.

(B) Tomemos uma distribuição com suporte compacto em Ω, $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ que satisfaz $\Delta^T\mu = 0$ em um aberto conexo relativamente compacto $\Omega' \subset \Omega - supp\Delta\mu$ pelo item (1) do teorema μ é analítica na componente conexa Ω'. Mas como a distribuição tem suporte compacto μ se anula em Ω', como o argumento é valido para qualquer componente conexa de $\Omega - supp\Delta\mu$. Temos que $supp\mu \subset supp\Delta\mu \cup (\cup_j \Omega'_j)$ compacto, portanto Ω é $P(D)$ convexo para Δ.

(C) mostrêmos que para o operador laplaciano vale a propriedade (1) do enunciado do teorema.

Definição: Um operador diferencial D é dito hipoelíptico em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e distruibuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vale que se $f = Du \in C^\infty(U)$ então $u \in C^\infty(U)$.

Teorema: Se o operador D tem uma solução fundamental $Ef \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então D é hipoelíptico.

Demonstração: Dado U aberto no qual $f = Du$ é C^∞, basta mostrar que u é C^∞ na vizinhança de um ponto $x_0 \in U$. Tomemos uma vizinhança $U' \subset U$ de x_0, definamos uma função $g \in C_c^\infty(U)$ tal que $g = 1$ em U'. Então

$$D(gu) = gDu + v = gf + v \tag{6}$$

Onde v é composta por uma combinação linear de derivadas de g, portando $v = 0$ em U'.

Seja agora E uma solução fundamental de D como no enunciado

$$E * D(gu) = (DE) * gu = gu \tag{7}$$

Logo

$$gu = E * D(gu) = E * gf + E * v \tag{8}$$

Na equação acima temos que o termo $E * gf$ é C^∞ pois é a convolução de uma função C_c^∞ com uma distribuição. Resta mostrar que $E * v$ é C^∞. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, definamos a seguinte vizinhança de x_0.

$$V_\epsilon = \{x : d(x, \{U'\}^c) > \epsilon\} \tag{9}$$

Agora definamos a seguinte função corte $\xi_\epsilon = 1$ se $|x| < \epsilon/2$ e vale 0 se $|x| > \epsilon$. E podemos escrever:

$$E * v = (\xi_\epsilon E) * v + [(1 - \xi_\epsilon)E] * v \tag{10}$$

O termo $[(1 - \xi_\epsilon)E] * v$ é C^∞ em todo domínio, resta mostrar que $(\xi_\epsilon E) * v$ é C^∞ . Mas

$$supp[\xi_\epsilon E] * v \subset supp[\xi_\epsilon E] + suppv \tag{11}$$

Já vimos que $v = 0$ em U' (pela definição de v ela é uma combinação linear de derivadas de g que é constante em U'), mas $V_\epsilon \subset U'$, então $[\xi_\epsilon E] * v$ se anula em $V_\epsilon \subset U'$ e portanto é C^∞ neste conjunto.

(D) Para o operador laplaciano a propriedade (1) do enunciado do teorema segue da formula integral de Poisson para funções harmônicas: Se u é uma função harmônica numa vizinhança Ω do ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ela pode ser representada como uma média dos valores de u numa esfera centrada em x_0 multiplicada por um kernel:

$$u(x) = \frac{1}{A} \int_{(|y|=R)} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n} d\sigma(y) \tag{12}$$

onde A é a área da superfície da esfera de raio R em $\mathbb{R}^n$. A série de taylor correspondente é convergente para $|x| < R$, logo a série pode ser integrada termo a termo fornecendo uma representação de $u(x)$ em série.

No caso mais geral de operadores elípticos de coeficientes constantes pode-se usar o seguinte fato:

Definição: Um operador diferencial D é dito analítico hipoelíptico em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ vale que se $f = Du$ é analítica em U para uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então u é analítica em U.

Teorema: Se o operador D tem uma solução fundamental E analítica em $(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então D é analítico-hipoelíptico.

References

[*Treves*(2006)] Trèves, F.Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels (2006). *Dover*

[*Bourbaki*(1987)] Topological Vector Spaces (1987). *Springer*