O teorema de L. Schwartz sobre aplicações entre espaços de Fréchet

Antonio Victor da Silva Junior - 7157554
Nicholas Braun Rodrigues - 7161754

Este trabalho é uma exposição dos resultados do artigo [Sch53] com uma aplicação no estudo dos espaços de cohomologia de Dolbeault de uma variedade complexa compacta.

1. HOMOMORFISMOS E APLICAÇÕES COMPACTAS

Nesta seção apresentamos os resultados do artigo [Sch53]. Seguiremos de perto a demonstração original oferecendo alguns detalhes adicionais. Usaremos a notação que foi adotada em sala de aula.

1.1 DEFINIÇÃO. Sejam E e F espaços localmente convexos de Hausdorff. Uma aplicação $v \in L(E, F)$ é dita *compacta* se existe $V \in \Phi_E(0)$ tal que $v(V)$ é relativamente compacto em F .

1.2 TEOREMA. Sejam E e F espaços localmente convexos de Hausdorff e sejam $u, v \in L(E, F)$. Suponha que valem as seguintes condições:

1. A aplicação v é compacta.
2. A aplicação u é um isomorfismo de E sobre $u(E)$;
3. O subespaço $u(E)$ é fechado em F ;

Então a aplicação $w := u + v$ é um homomorfismo com $\dim \text{Ker } w < \infty$ e $w(E)$ é fechado em F .

Demonstração.

- Mostremos que $\text{Ker } w$ tem dimensão finita:

Basta provarmos que $\text{Ker } w$ tem uma vizinhança da origem relativamente compacta. Seja $V \in \Phi_E(0)$ um tonel tal que $v(V)$ é relativamente compacta em F . Como V é um tonel e uma vizinhança da origem, existe p , uma seminorma contínua em E , tal que $V = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$. Seja $W := V \cap \text{Ker } w$. Então W é uma vizinhança da origem em $\text{Ker } w$. Mostraremos que W é relativamente compacto: para todo $x \in W$, temos $w(x) = 0$, isto é, $u(x) = -v(x)$, logo $u(W) = -v(W)$. Como $\overline{v(W)} \subset \overline{v(V)}$ e $\overline{v(V)}$ é compacto temos que $u(W)$ é relativamente compacto. Como $u : E \rightarrow u(E)$ é um isomorfismo e $u(E) \subset F$ é fechado temos que $\overline{u(W)} \subset u(E)$ é compacto, logo W é relativamente compacto.

- Mostremos que a aplicação w é um homomorfismo e que tem imagem fechada:

Tendo em vista o que provamos no parágrafo anterior e aplicando a proposição B.1, podemos restringir u e v a um suplementar topológico de $\text{Ker } w$, logo basta considerar o caso em que w é injetora. Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ um *net* em E e suponha que exista $y \in F$ tal que $\lim w(x_\alpha) = y$. Aplicando a proposição A.3[1.], podemos supor que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um *ultranet*. Para concluir que $w(E)$ é fechado, precisamos mostrar que existe $x_0 \in E$ tal que $w(x_0) = y$, e para mostrar que w é um homeomorfismo sobre sua imagem (e portanto um homomorfismo) precisamos mostrar que $\lim x_\alpha = x_0$. Pela proposição A.3[3.] temos um *ultranet* $(p(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ em $[0, \infty[$. Tomando a compactificação de Alexandrov $[0, \infty]$ da semi-reta $[0, \infty[$, podemos aplicar a proposição A.3[4.b)] e obter então $\lim p(x_\alpha) =: a \in [0, \infty]$. Analisaremos os dois possíveis casos:

- Caso $a < \infty$:

Nesse caso temos

$$p\left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha) + 1}\right) \leq 1,$$

logo

$$v\left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha) + 1}\right) \in v(V),$$

e como $v(V)$ é relativamente compacto podemos mais uma vez aplicar a proposição A.3[3. e 4.b)] e obter:

$$\lim v\left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha) + 1}\right) =: y_1 \in \overline{v(V)}.$$

Como

$$\lim w\left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha) + 1}\right) = \frac{y}{a + 1},$$

temos

$$\lim u \left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha) + 1} \right) = \frac{y}{a + 1} - y_1,$$

isto é, $\lim u(x_\alpha) = y - (a + 1)y_1$. Como u tem imagem fechada e é um isomorfismo sobre sua imagem, temos que o *ultranet* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge para algum $x_0 \in E$, logo $w(x_0) = y$. Portanto w é um homeomorfismo sobre sua imagem, e esta é fechada.

o Caso $a = \infty$:

Mostraremos que este caso não acontece. Suponha por absurdo que $a = \infty$. Existe $\alpha_0 \in A$ tal que $p(x_\alpha) > 0$ para $\alpha \geq \alpha_0$. Temos:

$$\lim_{\alpha \geq \alpha_0} w \left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha)} \right) = 0.$$

Como no caso anterior, temos:

$$\lim_{\alpha \geq \alpha_0} v \left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha)} \right) =: y_1 \in \overline{v(V)},$$

assim como:

$$\lim_{\alpha \geq \alpha_0} u \left(\frac{x_\alpha}{p(x_\alpha)} \right) =: y_2 \in \overline{v(V)},$$

e por fim:

$$\lim_{\alpha \geq \alpha_0} \frac{x_\alpha}{p(x_\alpha)} =: x_0 \in E.$$

Temos $p(x_0) = 1$, e portanto $x_0 \neq 0$. Como $w(x_0) = 0 = w(0)$, chegamos a uma contradição com o fato de w ser injetora.

□

1.3 TEOREMA. *Sejam E e F espaços localmente convexos de Hausdorff e sejam $u, v \in L(E, F)$. Suponha que valem as seguintes condições:*

1. *A aplicação u é um homomorfismo fraco sobrejetor;*
2. *A aplicação v é compacta.*

Suponha, ademais, que a aplicação u possui a seguinte propriedade:

($\mathcal{K}$) *Dado $K \subset F$ compacto convexo, existe $Q \subset E$ compacto convexo tal que $u(Q) \supset K$.*

Então a aplicação $w := u + v$ é um homomorfismo fraco e $w(E)$ é um subespaço fechado de F com codimensão finita.

Demonstração. Consideremos os espaços E' e F' munidos das topologias $\gamma(E', E)$ e $\gamma(F', F)$, respectivamente. Mostraremos primeiramente que as aplicações ${}^t u$ e ${}^t v$ satisfazem as condições na hipótese do teorema 1.2.

1. A aplicação ${}^t v$ é compacta:

Seja $V \in \Phi_E(0)$ convexa tal que $\overline{v(V)}$ é compacto. Para concluir que ${}^t v$ é compacta, temos que mostrar que ${}^t v$ leva uma vizinhança da origem de F' em um conjunto relativamente compacto de E' . Como $\overline{v(V)}$ é um compacto convexo de F , temos que $V' := \overline{v(V)}^\circ$ é vizinhança da origem em F' . Mostraremos que ${}^t v(V')$ é relativamente compacto.

- Mostremos que ${}^t v(V') \subset V^\circ$, isto é, ${}^t v(V')$ é um conjunto equicontínuo:

Com efeito, seja $x' \in {}^t v(V')$, isto é, $x' = {}^t v(y')$, em que $y' \in V' \subset v(V)^\circ$. Temos:

$$\begin{aligned} |\langle x', x \rangle| &= |\langle {}^t v(y'), x \rangle| \\ &= |\langle y', v(x) \rangle| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

para todo $x \in V$, isto é, $x' \in V^\circ$. Logo, ${}^t v(V') \subset V^\circ$.

Como a topologia $\gamma(E', E)$ é uma topologia intermediária entre $c(E', E)$ e $\sigma(E', E)$ e do teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki temos que V° é $\sigma(E', E)$ -compacto, segue da proposição B.2 que ${}^t v(V')$ é relativamente compacto.

2. A aplicação ${}^t u$ é um isomorfismo de F' sobre ${}^t u(F')$:

De fato, como u é sobrejetora temos que ${}^t u$ é injetora. Seja $({}^t u(y'_\alpha))_{\alpha \in A}$ um *net* em ${}^t u(F')$. Suponha que $\lim {}^t u(y'_\alpha) = 0$. Mostraremos que $\lim y'_\alpha = 0$, o que nos permite concluir que a aplicação inversa ${}^t u^{-1} : {}^t u(F') \rightarrow F'$ é contínua em 0, e portanto, contínua em ${}^t u(F')$. Seja $K \subset F$ um subconjunto compacto convexo. Pela condição $(\mathcal{K})$, existe $Q \subset E$ compacto convexo tal que $K \subset u(Q)$. Existe $\alpha_0 \in A$ tal que para $\alpha \geq \alpha_0$ tem-se ${}^t u(y'_\alpha) \in Q^\circ$, logo:

$$|\langle y'_\alpha, u(x) \rangle| \leq 1, \quad x \in Q.$$

Portanto para $\alpha \geq \alpha_0$ temos $y'_\alpha \in u(Q)^\circ \subset K^\circ$. Como K é um subconjunto compacto convexo arbitrário, temos $\lim y'_\alpha = 0$.

3. O subespaço ${}^t u(F')$ é fechado em E' :

Como u é um homomorfismo fraco, o subespaço $u^t(F')$ é $\sigma(E', E)$ -fechado, e como a topologia $\gamma(E', E)$ é mais fina que a topologia $\sigma(E', E)$, segue que ${}^t u(F')$ é fechado.

Pelo teorema 1.2, a aplicação ${}^t w = {}^t u + {}^t v$ é um homomorfismo com $\dim \text{Ker } {}^t w < \infty$ e imagem fechada.

Antes de retomar a demonstração do teorema, observemos que a topologia $\gamma(E', E)$ é uma topologia intermediária entre a topologia fraca $\sigma(E', E)$ e a topologia de Mackey $\tau(E', E)$, e analogamente com respeito a $\gamma(F', F)$. Portanto:

$$\left(E'_{\gamma(E', E)}\right)' = \left(E'_{\sigma(E', E)}\right)' \simeq E \quad \text{e} \quad \left(F'_{\gamma(F', F)}\right)' = \left(F'_{\sigma(F', F)}\right)' \simeq F.$$

Podemos concluir a demonstração do teorema.

- Mostremos que a aplicação w é um homomorfismo fraco:

Como ${}^t w(F')$ é um convexo fechado, temos que ${}^t w(F')$ é fechado na topologia $\sigma(E', (E'_\gamma)')$, e pela observação anterior essa topologia é igual a $\sigma(E', E)$, isto é, ${}^t w(F')$ é $\sigma(E', E)$ -fechado. Portanto w é um homomorfismo fraco.

- Mostremos que o subespaço $w(E)$ é fechado:

A aplicação ${}^t w$ é um homomorfismo, em particular, é um homomorfismo fraco. Pela observação anterior, temos que os duais de E' e F' são E e F . Logo, a transposta de ${}^t w$ é a própria w , e segue que $w(E)$ é $\sigma(F, F')$ -fechado e, portanto, fechado pois a topologia de F é mais fina que $\sigma(F, F')$.

- Mostremos que a codimensão de $w(E)$ é finita:

Temos que verificar que a dimensão de $F/w(E)$ é finita. Pela proposição B.3, temos $(F/w(E))' \simeq \text{Ker } {}^t w$, em que o isomorfismo é algébrico. Como $\text{Ker } {}^t w$ tem dimensão finita, o mesmo vale para $(F/w(E))'$ e, portanto, para $F/w(E)$.

□

1.4 COROLÁRIO. *Sejam E e F espaços de Fréchet e sejam $u, v \in L(E, F)$. Suponha que valem as seguintes condições:*

1. *A aplicação u é sobrejetora;*
2. *A aplicação v é compacta.*

Então a aplicação $w := u + v$ tem imagem fechada com codimensão finita.

Demonstração. A aplicação u é aberta (pelo teorema da aplicação aberta), logo, um homomorfismo e, em particular, um homomorfismo fraco. Para aplicarmos o teorema 1.3 basta checarmos que u satisfaz a condição $(\mathcal{K})$. Como E, F são espaços de Fréchet e u é sobrejetora, então u admite¹ uma seção contínua, isto é, existe $s : F \rightarrow E$ contínua, mas não necessariamente linear, tal que $u(s(y)) = y, \forall y \in F$. Para $K \subset F$ compacto convexo, tome $Q := \overline{\text{Conv}[s(K)]}$. Como E é espaço de Fréchet e $s(K)$ é compacto, temos (por resultados vistos em aula): o conjunto Q é compacto e convexo. Temos $u(Q) \supset u(s(K)) = K$. Portanto, a aplicação u satisfaz a condição $(\mathcal{K})$. □

¹Este resultado foi apresentado em um seminário. Cf. [Bou03] (§4, Prop. 12, p. II.35).

2. APLICAÇÃO

Como aplicação do corolário 1.4, estudaremos a seguir os grupos de cohomologia de Dolbeault de uma variedade complexa compacta. Seguiremos de perto a demonstração de um teorema do livro [GR65] (Thm. 19, Ch. VIII, Sec. A, p. 245), mas nos restringiremos ao caso de uma *variedade* complexa compacta e o nosso feixe será o feixe das p -formas holomorfas.

Seja $\Omega \subset \mathbf{C}^N$ um subconjunto aberto. Denotamos as coordenadas em Ω por $z = (z_1, \dots, z_N)$. Logo $z = x + iy$, em que $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^N$ e $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq N$. Com estas coordenadas denotamos:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j,$$

para $1 \leq j \leq N$. Sejam $p, q \in \{0, 1, \dots, N\}$, uma (p, q) -*forma diferencial* u em Ω é uma $(p+q)$ -*forma diferencial* em Ω de classe C^∞ que pode ser expressa por:

$$u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

em que a soma acima é sobre o conjunto dos multi-índices ordenados $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$ e para tais multi-índices tem-se $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ e $u_{IJ} \in C^\infty(\Omega)$. O espaço das (p, q) -formas em Ω é denotado por $C_{(p,q)}^\infty(\Omega)$. Como usual, a ação do operador $\bar{\partial}$ nas (p, q) -formas em Ω é dada pela expressão:

$$\bar{\partial}u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Logo $\bar{\partial}u \in C_{(p,q+1)}^\infty(\Omega)$ e $\bar{\partial}^2 = 0$. Portanto, temos um complexo de operadores diferenciais:

$$C_{(p,0)}^\infty(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} C_{(p,1)}^\infty(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} C_{(p,N)}^\infty(\Omega) \longrightarrow 0 \quad (D)_p$$

Se Ω for uma variedade complexa de dimensão N , temos também definido o operador $\bar{\partial}$ agindo em (p, q) -formas. Denotamos por $\mathcal{O}(\Omega)$ o *espaço das funções holomorfas* em Ω , isto é, fazendo a identificação $C_{(0,0)}^\infty(\Omega) \simeq C^\infty(\Omega)$ temos $\mathcal{O}(\Omega) = \text{Ker} \left[\bar{\partial} : C^\infty(\Omega) \rightarrow C_{(0,1)}^\infty(\Omega) \right]$. Denotamos, ademais, por $\mathcal{O}^p(\Omega)$ o *espaço das p -formas holomorfas* em Ω , isto é:

$$\mathcal{O}^p(\Omega) = \text{Ker} \left[\bar{\partial} : C_{(p,0)}^\infty(\Omega) \rightarrow C_{(p,1)}^\infty(\Omega) \right] = \left\{ \sum_{|I|=p} u_I dz_I : u_I \in \mathcal{O}(\Omega) \right\}.$$

2.1 DEFINIÇÃO. Sejam $p, q \in \{0, 1, \dots, N\}$, com $q \geq 1$. Definimos o *espaço de cohomologia de Doubeault* de Ω de bigrau (p, q) como sendo o espaço de cohomologia de grau q do complexo

$(D)_p$ acima, isto é, o $\mathbf{C}$ -espaço vetorial:

$$H^{(p,q)}(\Omega) := \frac{\text{Ker} \left[\bar{\partial} : C_{(p,q)}^\infty(\Omega) \rightarrow C_{(p,q+1)}^\infty(\Omega) \right]}{\text{Ran} \left[\bar{\partial} : C_{(p,q-1)}^\infty(\Omega) \rightarrow C_{(p,q)}^\infty(\Omega) \right]}.$$

Para $q = 0$, temos $H^{(p,0)}(\Omega) := \text{Ker} \left[\bar{\partial} : C_{(p,0)}^\infty(\Omega) \rightarrow C_{(p,1)}^\infty(\Omega) \right] = \mathcal{O}^p(\Omega)$.

2.2 TEOREMA. *Seja Ω uma variedade complexa compacta. Então os espaços $H^{(p,q)}(\Omega)$ têm dimensão finita.*

Demonstração. Seja $N := \dim \Omega$. Sejam $\mathcal{U} := \{U_k : k = 1, \dots, M\}$ e $\mathcal{V} := \{V_k : k = 1, \dots, M\}$ coberturas de Ω formadas por abertos biholomorficamente equivalentes ao polidisco

$$\Delta := \{z \in \mathbf{C}^N : |z_j| < 1, j = 1, \dots, N\},$$

e tais que $\bar{V}_k \Subset U_k$, para $k = 1, \dots, M$. Pela proposição D.2, cada interseção finita

$$\begin{aligned} U_{k_0} \cap \dots \cap U_{k_q} & \quad 1 \leq k_j \leq M \\ V_{k_0} \cap \dots \cap V_{k_q} & \quad 0 \leq j \leq q \end{aligned}$$

é uma variedade de Stein qualquer que seja $q \in \mathbf{Z}_+$. Pelo teorema D.4, estamos em condições de aplicar o teorema C.2 (de Leray), logo:

$$H^{(p,q)}(\Omega) = \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}^p) = \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}^p), \quad q \in \mathbf{Z}_+.$$

Portanto, é suficiente mostrar que $\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}^p)$ tem dimensão finita. Considere a aplicação

$$\varphi : N(\mathcal{V}) \rightarrow N(\mathcal{U}),$$

dada por

$$\varphi(V_{k_0}, \dots, V_{k_q}) := (U_{k_0}, \dots, U_{k_q}).$$

A aplicação φ induz aplicações

$$\varphi_q^* : C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^q(N(\mathcal{V}), \mathcal{O}^p), \quad 0 \leq q \leq N,$$

dadas por:

$$\left(\varphi_q^*(f) \right)_\sigma := \rho_{|\sigma|}^{|\varphi(\sigma)|} f_{\varphi(\sigma)}, \quad f \in C^q(N(\mathcal{U}), \mathcal{O}^p), \quad \sigma \in N(\mathcal{V}).$$

Como $\mathcal{O}^p(|\sigma|)$ é um espaço de Montel e $\bar{|\sigma|}$ é um subconjunto compacto de $|\varphi(\sigma)|$, as aplicações

$$\rho_{|\sigma|}^{|\varphi(\sigma)|} : \mathcal{O}^p(|\varphi(\sigma)|) \rightarrow \mathcal{O}^p(|\sigma|)$$

são compactas. Com efeito, tome $\varepsilon > 0$, e considere a vizinhança $W \in \Phi_{\mathcal{O}^p(|\varphi(\sigma)|)}(0)$ dada por:

$$W := \left\{ u \in \mathcal{O}^p(|\varphi(\sigma)|) : u = \sum_{|I|=p} u_I dz_I \quad \text{e} \quad \sup_{|\sigma|} |u_I| < \varepsilon, |I| = p \right\}.$$

A imagem de W por $\rho_{|\sigma|}^{|\varphi(\sigma)|}$ é limitada, e portanto, relativamente compacta. A identificação:

$$C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) = \prod_{\sigma \in N^q(\mathfrak{U})} \mathcal{O}^p(|\sigma|),$$

em que $N^q(\mathfrak{U})$ é o conjunto dos q -simplexos de $\mathfrak{U}$ e o produto à direita está munido da topologia produto (note que se trata de um produto finito, pois $\mathfrak{U}$ é cobertura finita), mune $C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)$ de uma estrutura de espaço de Fréchet. Com esta estrutura, as aplicações φ_q^* são compactas. Ademais, o operador de bordo $\delta : C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^{q+1}(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)$ é contínuo, logo o subespaço

$$Z^q(\mathfrak{U}) := \text{Ker} [\delta : C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^{q+1}(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)]$$

é fechado em $C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)$. Definindo analogamente $Z^q(\mathfrak{V})$, temos $\varphi_q^*(Z^q(\mathfrak{U})) \subset Z^q(\mathfrak{V})$. Fixemos agora $q \geq 1$. Considere os espaços de Fréchet:

$$E := Z^q(\mathfrak{U}) \times C^{q-1}(N(\mathfrak{V}), \mathcal{O}^p) \quad \text{e} \quad F := Z^q(\mathfrak{V}).$$

É um corolário² da demonstração do teorema C.2 (de Leray) em [GR65] que a restrição

$$[\varphi_q^*] : \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^p) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{O}^p),$$

induzida³ em cohomologia por φ_q^* , é um isomorfismo. Logo, segue que a aplicação $u : E \rightarrow F$ dada por:

$$u(f, g) := \varphi_q^*(f) + \delta g$$

é sobrejetora. Como $v : E \rightarrow F$ dada por:

$$v(f, g) := -\varphi_q^*(f)$$

é compacta, segue do corolário 1.4 que a aplicação $w := u + v$, que é dada por $w(f, g) = \delta g$, aplica E sobre um subespaço fechado de F com codimensão finita. Portanto

$$\check{H}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{O}^p) = \frac{\text{Ker} [\delta : C^q(N(\mathfrak{V}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^{q+1}(N(\mathfrak{V}), \mathcal{O}^p)]}{\text{Ran} [\delta : C^{q-1}(N(\mathfrak{V}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^q(N(\mathfrak{V}), \mathcal{O}^p)]} = \frac{Z^q(\mathfrak{V})}{\delta(C^{q-1}(N(\mathfrak{V}), \mathcal{O}^p))} = \frac{F}{w(E)}$$

tem dimensão finita.

Para o caso $q = 0$, temos que a aplicação $[\varphi_0^*]$ é um isomorfismo e uma aplicação compacta⁴, logo, $\check{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}^p)$ também tem dimensão finita. $\square$

²Cf. Cor. 5 (Ch. VI, Sec. D, p. 191) de [GR65].

³i.e., $[\varphi_q^*][f] = [\varphi_q^*(f)]$, em que $f \in Z^q(\mathfrak{U})$ e os colchetes indicam a passagem ao quociente nos espaços de cohomologia.

⁴Note que $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^p) = Z^0(\mathfrak{U})$, $\check{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}^p) = Z^0(\mathfrak{V})$ e $[\varphi_0^*]$ é a própria aplicação φ_0^* .

3. APÊNDICE

A. NETS E ULTRANETS

Esta seção contém alguns resultados sobre *nets* que serão aplicados na seção 1. Demonstrações podem ser encontradas no artigo [AA72].

A.1 DEFINIÇÃO. Seja X um conjunto e seja $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ um *net* em X .

1. Dizemos que um *net* $(y_\beta)_{\beta \in B}$ em X é um *refinamento* de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, ou que $(y_\beta)_{\beta \in B}$ *refina* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, se para todo $\alpha_0 \in A$ existe $\beta_0 \in B$ tal que

$$\{y_\beta : \beta \geq \beta_0\} \subset \{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}.$$

2. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um *ultranet* se $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ refina todos os seus refinamentos.

A.2 OBSERVAÇÃO. Note que se X é um espaço topológico de Hausdorff e $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um *net* em X que converge para $x \in X$, então todo refinamento de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge para x .

A.3 PROPOSIÇÃO. Seja X um conjunto e seja $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ um *net* em X .

1. O *net* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ admite um *ultranet* que o refina;
2. O *net* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um *ultranet* se, e somente se, dado $S \subset X$ vale uma das condições:
 - a) Existe $\alpha_S \in A$ tal que se $\alpha \geq \alpha_S$, então $x_\alpha \in S$;
 - b) Existe $\alpha_S \in A$ tal que se $\alpha \geq \alpha_S$, então $x_\alpha \in X \setminus S$.
3. Se $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma função a valores em um conjunto Y e $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um *ultranet*, então $(\varphi(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ é um *ultranet* em Y ;
4. Se X é um espaço topológico de Hausdorff e $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ é um *ultranet*, então:
 - a) Se $x \in X$ é um ponto de aglomeração⁵ de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, então $\lim x_\alpha = x$;
 - b) Se $K \subset X$ é compacto e $x_\alpha \in K, \forall \alpha \in A$, então existe $x \in K$ tal que $\lim x_\alpha = x$.
5. Se X, Y são espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ então f é contínua se, e somente se, f leva *ultranets* convergentes em *ultranets* convergentes.

B. ALGUMAS PROPOSIÇÕES

B.1 PROPOSIÇÃO. Sejam E um espaço localmente convexo de Hausdorff e $S \subset U$ um subespaço vetorial de dimensão finita. Então existe $W \subset E$ suplementar topológico de S .

⁵i.e., para todo aberto $U \ni x$ e para todo $\alpha_0 \in A$, existe $\alpha_1 \in A$ tal que $\alpha_1 \geq \alpha_0$ e $x_{\alpha_1} \in U$.

Demonstração. Seja $N := \dim S$ e fixe uma base $\{e_1, \dots, e_N\}$ para S . Podemos aplicar o teorema de Hahn-Banach e concluir que existem $f_j \in E'$, $j = 1, \dots, N$, tais que

$$f_j(e_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Defina $\pi : E \rightarrow E$, pondo:

$$\pi(x) := f_1(x)e_1 + \dots + f_N(x)e_N, \quad x \in E.$$

Como cada f_j é contínua e linear, $j = 1, \dots, N$, temos $\pi \in L(E)$. Além disso $\pi(E) \subset S$, uma vez que $e_1, \dots, e_N \in S$. Ademais, temos $\pi^2 = \pi$, pois $\pi|_S$ é a identidade de S . Portanto S tem suplementar. $\square$

B.2 PROPOSIÇÃO. *Seja E um espaço localmente convexo de Hausdorff e seja $H \subset E'$ um subconjunto equicontínuo. Então H é $\sigma(E', E)$ -relativamente compacto se, e somente se, H é $c(E', E)$ -relativamente compacto.*

Demonstração. Já sabemos que as topologias $\sigma(E', E)$ e $c(E', E)$ coincidem nos subconjuntos equicontínuos de E' . Seja $V \in \Phi_E(0)$ tal que $H \subset V^\circ$. Pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, temos que V° é $\sigma(E', E)$ -compacto, logo, V° é $\sigma(E', E)$ -fechado. Como a topologia $c(E', E)$ é mais fina que a topologia $\sigma(E', E)$, temos que V° também é $c(E', E)$ -fechado. Portanto, temos:

$$\overline{H}^{\sigma(E', E)} \subset V^\circ \quad \text{e} \quad \overline{H}^{c(E', E)} \subset V^\circ.$$

Como V° é equicontínuo, temos

$$\overline{H}^{\sigma(E', E)} = \overline{H}^{c(E', E)},$$

e segue a tese. $\square$

B.3 PROPOSIÇÃO. *Sejam E, F espaços localmente convexos de Hausdorff e $w \in L(E, F)$. Então:*

1. $\text{Ker } {}^t w = w(E)^\circ$;
2. Existe um isomorfismo algébrico $\psi : (F / w(E))' \rightarrow w(E)^\circ$.

Demonstração.

1. Seja $y' \in F'$. Temos:

$$\begin{aligned} y' \in \text{Ker } {}^t w &\iff \langle {}^t w(y'), x \rangle = 0, \quad \forall x \in E, \\ &\iff \langle y', w(x) \rangle = 0, \quad \forall x \in E, \\ &\iff y' \in w(E)^\circ. \end{aligned}$$

2. Defina $\psi : (F/w(E))' \rightarrow w(E)^\circ$ pondo:

$$\langle \psi(f), y \rangle := f(\pi(y)), \quad f \in \left(\frac{F}{w(E)} \right)', \quad y \in F,$$

em que $\pi : F \rightarrow F/w(E)$ é a projeção no quociente. Dada $f \in (F/w(E))'$ temos $\psi(f) \in F'$, pois f e π são lineares e contínuas. Além disso, se $y \in w(E)$, então $\pi(y) = 0$, logo $\langle \psi(f), y \rangle = 0$, isto é, $\psi(f) \in w(E)^\circ$. Como π é sobrejetora, temos pelo teorema de Hahn-Banach que ψ é injetora. Mostraremos que ψ é sobrejetora. Seja $y' \in w(E)^\circ$. Defina $f \in (F/w(E))'$ pondo:

$$\langle f, \pi(y) \rangle = \langle y', y \rangle, \quad y \in F.$$

Se $\pi(y) = \pi(z)$, então $y - z \in w(E)$, logo $\langle y', y - z \rangle = 0$, e portanto f está bem definida. Além disso, f é linear e contínua (pois π é aberta pela definição de topologia quociente) e $\psi(f) = y'$. Então ψ é um aplicação linear bijetora, isto é, um isomorfismo algébrico. □

C. TEOREMA DE LERAY

A seguir construiremos os grupos de cohomologia de Čech de uma variedade complexa Ω a valores no feixe das p -formas holomorfas em Ω . Esta é uma construção geral que pode ser feita em um espaço topológico paracompacto qualquer e com valores em um feixe de grupos abelianos arbitrário, no entanto nos restringiremos ao caso em consideração para fixar as ideias. Esta seção de apêndice foi baseada no Ch.VI, Sec.D do livro [GR65].

Seja Ω uma variedade complexa e seja $\mathfrak{U}$ uma cobertura aberta de Ω . Dado $q \in \mathbf{Z}_+$, um q -simplexo $\sigma = (U_0, \dots, U_q)$ de $\mathfrak{U}$ é uma $(q+1)$ -upla formada por abertos de $\mathfrak{U}$ tal que:

$$|\sigma| := U_0 \cap \dots \cap U_q \neq \emptyset.$$

O aberto $|\sigma|$ é denominado o *suporte* de σ . Denotamos por $N^q(\mathfrak{U})$ o conjunto dos q -simplexos de $\mathfrak{U}$. O conjunto $N(\mathfrak{U}) := \bigcup_{q \in \mathbf{Z}_+} N^q(\mathfrak{U})$ é denominado o *nervo* de $\mathfrak{U}$. Dado $q \in \mathbf{Z}_+$, uma q -cocadeia de $N(\mathfrak{U})$ é uma função f que a cada q -simplexo σ associa⁶ uma p -forma holomorfa

$$f_\sigma \in \mathcal{O}^p(|\sigma|) = \text{Ker} \left[\bar{\partial} : C_{(p,0)}^\infty(|\sigma|) \rightarrow C_{(p,1)}^\infty(|\sigma|) \right].$$

Denotamos por $C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)$ o conjunto das q -cocadeias.

Definimos os *operadores de cobordo*:

$$\delta_q : C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^{q+1}(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p), \quad q \in \mathbf{Z}_+,$$

pondo:

$$(\delta_q f)_\sigma = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \rho_{|\sigma|}^{\sigma_j} f_{\sigma_j} \quad (\dagger),$$

em que:

⁶No caso geral, uma q -cocadeia associa um q -simplexo σ a uma seção contínua $f_\sigma \in \Gamma(|\sigma|, \mathcal{S})$ do feixe $\mathcal{S}$ em questão.

1. Temos $\sigma \in N^{q+1}(\mathfrak{U})$ e se $\sigma = (U_0, \dots, U_{q+1})$, então $\sigma_j := (U_0, \dots, U_{j-1}, U_{j+1}, \dots, U_{q+1})$;
2. A aplicação $\rho_{|\sigma|}^{|\sigma_j|}$ associa a cada p -forma holomorfa em $|\sigma_j|$ sua restrição a $|\sigma|$.

A expressão (†) implica $\delta_{q+1}\delta_q = 0, \forall q \in \mathbb{Z}_+$. Para simplificar a notação, denotaremos todos os operadores de cobordo por δ . Portanto, temos um complexo:

$$C^0(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \xrightarrow{\delta} \dots \quad (\check{C})_p$$

C.1 DEFINIÇÃO. Seja $p \in \{0, \dots, N\}$. Definimos a *cohomologia de Čech* de Ω com respeito à cobertura $\mathfrak{U}$ e com valores no feixe $\mathcal{O}^p$ como sendo a cohomologia do complexo $(\check{C})_p$ acima. Ou seja, para $q \geq 1$, o *grupo de cohomologia de Čech* de grau q é o grupo:

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^p) := \frac{\text{Ker} [\delta : C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^{q+1}(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)]}{\text{Ran} [\delta : C^{q-1}(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^q(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)]}.$$

Para $q = 0$, temos $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^p) := \text{Ker} [\delta : C^0(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p) \rightarrow C^1(N(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^p)] \simeq \mathcal{O}^p(\Omega)$.

Na seção 2, usamos a cohomologia de Čech para calcular a cohomologia de Dolbeault de uma variedade complexa compacta. Para isto fazemos uso do seguinte teorema⁷:

C.2 TEOREMA. (LERAY) *Seja Ω uma variedade complexa e seja $\mathfrak{U}$ uma cobertura aberta de Ω . Fixe $p \in \{0, \dots, N\}$. Se $H^{(p,q)}(|\sigma|) = 0, \forall \sigma \in N(\mathfrak{U}), \forall q \geq 1$, então*

$$H^{(p,q)}(\Omega) \simeq \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^p),$$

para todo $q \geq 0$.

D. VARIÉDADES DE STEIN

Nesta seção, enunciaremos alguns fatos de Análise Complexa multidimensional que serão aplicados na seção 2. Nossas referências foram os livros [GR65] e [Hö66].

D.1 DEFINIÇÃO. Uma variedade complexa Ω de dimensão N é uma *variedade de Stein* se valem as seguintes condições:

1. A variedade Ω é *holomorficamente convexa*, isto é, a *envoltória holomorfa*

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} := \left\{ z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \right\}$$

de um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ é compacta;

2. Se $z, w \in \Omega$ e $z \neq w$, então existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $f(z) \neq f(w)$;
3. Para cada $z \in \Omega$, existem $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}(\Omega)$ que definem um sistema de coordenadas em alguma vizinhança aberta de z .

⁷Cf. Thm. 4 (Ch. VI, Sec. D, p. 189) de [GR65].

D.2 PROPOSIÇÃO. *Seja Ω uma variedade complexa. Se $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ são abertos⁸ de Stein, então $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é um aberto de Stein.*

Demonstração. As condições [2.] e [3.] da definição D.1 são verificadas: uma vez que estas condições valem, por exemplo, para Ω_1 , basta restringir as correspondentes funções a $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Mostremos que vale a condição [1.]. Seja $K \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ um subconjunto compacto. Mostraremos que $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$ é (sequencialmente) compacto. Note que vale:

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \subset \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1)} \cap \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_2)}.$$

Ademais, a condição que aparece na definição de envoltória holomorfa é fechada, logo, $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$ é um subconjunto fechado de $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$. Como $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1)}$ é compacto, a sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1)} \subset \Omega_1$. Esta subsequência, por sua vez, admite uma subsequência convergente em $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_2)} \subset \Omega_2$, e que, portanto, converge para um ponto de $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Como $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$ é fechado em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, o limite das subsequências acima pertence a $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$. $\square$

D.3 EXEMPLO. Todo domínio de holomorfia de $\mathbb{C}^N$ é uma variedade de Stein, em particular, pelo teorema de Dolbeault-Grothendieck, o polidisco

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1, j = 1, \dots, N\}$$

é uma variedade de Stein.

Como caso particular do Teorema B de Cartan, temos:

D.4 TEOREMA. *Se Ω é uma variedade de Stein de dimensão N e $p \in \{0, \dots, N\}$, então:*

$$H^{(p,q)}(\Omega) = 0, \quad \forall q \geq 1.$$

REFERÊNCIAS

- [AA72] J. F. Aarnes e P. R. Andenæs. “On nets and filters”. *Math. Scand.*, **31**:285–292, 1972.
- [Bou03] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces*. Elements of Mathematics. Springer, 1ª edição, 2003. Originalmente publicado como “Espaces Vectoriels Topologiques”, Masson, Paris, 1981.
- [GR65] R. C. Gunning e H. Rossi. *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1ª edição, 1965.
- [Hö66] L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*. D. van Nostrand Publ. Co., 1966.
- [Sch53] L. Schwartz. “Homomorphismes et applications complètement continues”. *C. R. Acad. Sc.*, **236**:2472–2473, 1953.

⁸*i. e.*, são variedades de Stein com a estrutura induzida.