

Notas de aula da disciplina “Cálculo Integral”

Paulo D. Cordaro

11a. versão - 22 de Dezembro de 2017

*Recebei a instrução e não o dinheiro
Preferi a ciência ao fino ouro,
pois a Sabedoria vale mais que as pérolas
e jóia alguma a pode igualar.*

Provérbios 8, 10-11.

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1. Teoria Abstrata da Integração	3
Capítulo 2. A medida e a integral de Lebesgue	15
Capítulo 3. O Teorema de mudança de variável na integral de Lebesgue	23
Capítulo 4. Campos e formas diferenciais	33
Formas diferenciais	35
Produto exterior	38
A derivada exterior	40
Pullback	42
Uma observação sobre a invariância	45
Apêndice - Módulos sobre anéis comutativos	45
Capítulo 5. Integração de formas diferenciais e o Teorema de Stokes	49
Simplexos e cadeias afins	52
O Teorema de Stokes (1a. versão)	55
Simplexos e cadeias singulares	57
O Teorema de Stokes (2a. versão)	58
Capítulo 6. Exemplos e aplicações	59
A fórmula de Green para o disco	59
Abertos regulares	60
Abertos com fronteira regular	65
A fórmula de Stokes para abertos com fronteira regular	67
O Teorema da divergência	68
A fórmula de Stokes para formas de classe C^1	71
Referências Bibliográficas	73
Apêndice A. A cohomologia de De Rham	75
Complexos de espaços vetoriais	75
A cohomologia de De Rham	76
Apêndice B. Exercícios	81
Capítulo 1	81
Capítulo 2	83
Capítulo 3	85

Capítulo 4	87
Capítulo 5	88
Capítulo 6	89
Apêndice	90
Índice Remissivo	93

Introdução

Estas notas tem como objetivo precípua apresentar o Teorema de Stokes e algumas de suas aplicações.

O Teorema de Stokes nada mais é que a versão multi-dimensional do bem conhecido Teorema Fundamental do Cálculo: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, digamos, continuamente diferenciável e se $a < b$ são números reais então vale a fórmula

$$(i) \quad \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Em particular, o valor da integral da derivada de f sobre o intervalo compacto $I = [a, b]$ é determinado pelos valores de f tomados na fronteira $\partial I = \{a, b\}$ de I . Se utilizarmos as notações

$$(ii) \quad df = f'(x)dx,$$

$$(iii) \quad \int_{\partial I} f = f(b) - f(a)$$

então (i) pode ser escrita na forma

$$(iv) \quad \int_I df = \int_{\partial I} f.$$

A igualdade (iv) recebe o nome de “Fórmula de Stokes”. É evidente que nossa discussão, um tanto informal, merece um maior esclarecimento e este será o objetivo de nossa exposição: vamos fornecer um significado preciso para (iv) no caso multi-dimensional e, para tal,

- Desenvolveremos, no Capítulo 4, a teoria das formas diferenciais, que na Fórmula de Stokes são os integrandos (em particular, daremos o significado preciso para a expressão df);
- Apresentaremos, no Capítulo 5, a teoria das cadeias singulares e sua fronteiras, que são os domínios de integração na Fórmula de Stokes.

Devemos enfatizar um fato que certamente não passou despercebido ao leitor: em (iii) existe uma importante escolha de sinais. No “ponto direito” do intervalo o valor da função f é tomado sem troca de sinal, enquanto que esta troca ocorre quando tomamos o valor de f no “lado esquerdo” do intervalo. Isto significa que para a validade da Fórmula de Stokes a fronteira do domínio deve ser tomada com a correta orientação. A questão da orientação da fronteira do domínio no caso multi-dimensional será também cuidadosamente analisada

no texto: mostraremos como escolher o sinal corretamente em cada uma das diversas faces da fronteira.

Para se definir integração de formas diferenciais necessitamos de dois ingredientes fundamentais: a teoria da integração em \mathbb{R}^N e o Teorema de Mudança de Variável na Integral Múltipla. Quanto à teoria da integração optamos pela integral de Lebesgue, que traz como vantagem, sobre a integral de Riemann, a de evitar as dificuldades oriundas da geometria dos domínios de integração. No nosso (particular) caso precisamos somente integrar funções mensuráveis e limitadas sobre conjuntos de medida finita. Com isto em mente apresentamos, no Capítulo 1, a teoria abstrata da integração nesta situação particular. A integral de Lebesgue em \mathbb{R}^N é então exposta no Capítulo 2 e, no Capítulo 3, apresentamos a demonstração completa do Teorema de Mudança de Variável para a integral de Lebesgue.

IME-USP, Novembro de 2017

CAPÍTULO 1

Teoria Abstrata da Integração

Seja X um conjunto não vazio e considere $\mathcal{P}(X) \doteq \{A : A \subset X\}$.

Definição 1.1. Uma σ -álgebra de subconjuntos de X é um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ não vazio tal que

- Se $A \in \mathcal{A}$ então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Note, em particular, que se \mathcal{A} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X então

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;
- Se $A, B \in \mathcal{A}$ então $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Um *espaço mensurável* é um par (X, \mathcal{A}) , onde X é um conjunto não vazio e \mathcal{A} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Um subconjunto A de X é *\mathcal{A} -mensurável* se $A \in \mathcal{A}$. Note que se (X, \mathcal{A}) é um espaço mensurável e se $Y \in \mathcal{A}$ então

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$$

é uma σ -álgebra de subconjuntos de Y . O par (Y, \mathcal{A}_Y) é então um espaço mensurável, denominado *subespaço mensurável de (X, \mathcal{A})* . Observe que \mathcal{A}_Y é simplesmente a classe de todos os conjuntos \mathcal{A} -mensuráveis contidos em Y .

Definição 1.2. Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável. Uma *medida* em (X, \mathcal{A}) é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

para toda seqüência $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Note a validade da seguintes propriedades:

- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;
- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, então $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Talvez a única destas propriedades que requeira uma melhor análise é a última. Para tal observe que se definirmos a seqüência

$$A_1^\bullet = A_1, \quad A_n^\bullet = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

temos $A_n^\bullet \in \mathcal{A}$ para todo n , $A_n^\bullet \cap A_m^\bullet = \emptyset$ se $n \neq m$ e também $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet$. Deste modo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^\bullet) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

já que $A_n^\bullet \subset A_n$ para todo n .

Exemplo 1.1. Considere um conjunto não vazio X , tome $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ e defina $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ pela regra

$$c(A) = \begin{cases} |A| & \text{se } A \text{ é finito;} \\ \infty & \text{se } A \text{ é infinito.} \end{cases}$$

A medida c é chamada *medida de contagem* sobre X .

Exemplo 1.2. Considere (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e para $x_0 \in X$ fixado defina $\nu_{x_0} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ pela regra

$$\nu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A; \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A. \end{cases}$$

A medida ν_{x_0} é chamada *medida de Dirac em \mathcal{A} concentrada em x_0* .

Exemplo 1.3. Considere um conjunto não vazio X , tome $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ e defina $\Phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ pela regra

$$\Phi(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset; \\ \infty & \text{se } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

É também fácil de ver que Φ define uma medida em $(X, \mathcal{P}(X))$.

Definimos finalmente um *espaço de medida* como sendo uma tripla (X, \mathcal{A}, μ) onde (X, \mathcal{A}) é um espaço mensurável e μ é uma medida em (X, \mathcal{A}) . Se $Y \in \mathcal{A}$ então $\mu_Y \doteq \mu|_{\mathcal{A}_Y}$ denomina-se *medida induzida por μ em Y* . Note que assim obtemos um novo espaço de medida $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

Proposição 1.1. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ satisfazendo $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$. Então*

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Demonstração. Como antes defina $A_1^\bullet = A_1$, $A_n^\bullet = A_n \setminus A_{n-1}$ se $n \geq 2$. Então $A_n = A_1^\bullet \cup \dots \cup A_n^\bullet$, $A_n^\bullet \cap A_m^\bullet = \emptyset$ se $n \neq m$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Logo

$$\mu(A_n) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j^\bullet) \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \quad \square$$

Corolário 1.1. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ satisfazendo $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ e $\mu(B_1) < \infty$. Então*

$$\mu(B_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Demonstração. Defina $A_n = B_1 \setminus B_n$, $n \geq 1$. Pela Proposição 1.1

$$\mu(B_1 \setminus B_n) = \mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Como $\mu(B_1) < \infty$ isto é o mesmo que

$$\mu(B_1) - \mu(B_n) \longrightarrow \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right). \quad \square$$

Observação. A hipótese $\mu(B_1) < \infty$ é fundamental para a conclusão do Corolário 1.1. De fato se tomarmos, no Exemplo 1.3, $X = \mathbb{R}$ e $B_n =]0, 1/n[$ teremos $\Phi(B_n) = \infty$ mas $\Phi(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \Phi(\emptyset) = 0$.

Passaremos agora ao estudo das chamadas funções mensuráveis.

Proposição 1.2. *Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (1) $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (2) $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (3) $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (4) $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

A demonstração desta proposição é uma simples consequência das identidades

$$\begin{aligned} \{x \in X : f(x) < \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - 1/n\}, \\ X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} &= \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}, \\ \{x \in X : f(x) > \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq \alpha + 1/n\}. \end{aligned}$$

Dizemos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{A} -mensurável se f satisfaz as propriedades equivalentes da Proposição 1.2. Note que se f é \mathcal{A} -mensurável então $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ para todo intervalo¹ I de \mathbb{R} . Em particular $f^{-1}\{\alpha\} \in \mathcal{A}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.3. *Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções \mathcal{A} -mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então são \mathcal{A} -mensuráveis as funções $f + g$, cf , fg .*

Demonstração. Uma vez que \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} temos, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \{x \in X : f(x) + g(x) < \alpha\} &= \{x \in X : f(x) < \alpha - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < \alpha - g(x)\}), \end{aligned}$$

¹Por um intervalo em \mathbb{R} entendemos um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte propriedade: se $r, s \in I$, $r < s$ e se $r < t < s$ então $t \in I$.

de onde segue que $f + g$ é \mathcal{A} -mensurável. É fácil ver que cf é \mathcal{A} -mensurável. Por outro lado temos $\{x \in X : f(x)^2 < \alpha\} = \emptyset$ se $\alpha \leq 0$ e

$$\{x \in X : f(x)^2 < \alpha\} = \{x \in X : -\alpha^{1/2} < f(x) < \alpha^{1/2}\}$$

se $\alpha > 0$, o que mostra que f^2 é \mathcal{A} -mensurável. Finalmente, da identidade

$$fg = \frac{1}{2} [(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

segue que fg é \mathcal{A} -mensurável. \square

Um espaço de medida (X, \mathcal{A}, μ) é dito *completo* se vale a seguinte propriedade:

$$A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, B \subset A \implies B \in \mathcal{A}.$$

Proposição 1.4. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida completo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{A} -mensurável. Se $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $B = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) = 0$ então g é \mathcal{A} -mensurável.*

Demonstração. Temos

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} = \underbrace{\{x \in X : g(x) > \alpha\} \cap B}_{B_1} \cup \underbrace{\{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap (X \setminus B)}_{B_2}.$$

Como (X, \mathcal{A}, μ) é completo segue que $B_1 \in \mathcal{A}$. Como, também, f é \mathcal{A} -mensurável segue que $B_2 \in \mathcal{A}$. \square

Estudaremos agora sequências de funções mensuráveis.

Proposição 1.5. *Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções \mathcal{A} -mensuráveis. Se $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente (resp. inferiormente) para cada $x \in X$ então a função $\sup f_k$ (resp. $\inf f_k$) é \mathcal{A} -mensurável.*

Demonstração. Temos

$$\{x \in X : \sup f_k(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f_k(x) > \alpha\}$$

o que mostra que $\sup f_k$ é \mathcal{A} -mensurável se cada f_k o for. Para a outra asserção basta notar que $\inf f_k = -\sup(-f_k)$. \square

Corolário 1.2. *Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções \mathcal{A} -mensuráveis tais que $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado para todo $x \in X$. Então são \mathcal{A} -mensuráveis as funções $\overline{\lim} f_k$ e $\underline{\lim} f_k$. Em particular, se existir $\lim f_k(x)$ para cada $x \in X$ então $\lim f_k$ é \mathcal{A} -mensurável.*

Demonstração. Temos

$$\underline{\lim} f_k(x) = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right), \quad \overline{\lim} f_k(x) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right). \quad \square$$

Note que se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{A} -mensurável então também o são as funções

$$f^+ = \sup\{f, 0\}, \quad f^- = \sup\{-f, 0\}.$$

Note também que f^+, f^- são ≥ 0 e que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Em particular $|f|$ também é \mathcal{A} -mensurável.

Seja $A \subset X$. A função característica de A é a função $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Note que χ_A é \mathcal{A} -mensurável se, e somente se, $A \in \mathcal{A}$.

Definição 1.3. *Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que ϕ é uma função simples se ϕ for \mathcal{A} -mensurável e $\phi(X)$ é um subconjunto finito de \mathbb{R} .*

Se $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples e se $\phi(X) = \{a_1, \dots, a_m\}$ então $A_j \doteq \phi^{-1}(\{a_j\}) \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, m$, e

$$(1.1) \quad X = \bigcup_{j=1}^m A_j, \quad \phi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}.$$

Esta representação de ϕ é chamada *representação canônica de ϕ* . Assim, uma função é simples se, e somente se, ela é uma combinação linear de funções características \mathcal{A} -mensuráveis. Note que uma função simples pode ser representada por diferentes tais combinações. Sua representação canônica, contudo, é única.

Proposição 1.6. *Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada. Então existe uma sequência uniformemente limitada de funções simples $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_n \leq f$ para todo n , satisfazendo $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in X$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado e cada $-n \leq k \leq n$ definimos

$$A_k \doteq \left\{ x \in X : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}.$$

Note que $A_k \in \mathcal{A}$, $A_k \cap A_p = \emptyset$ se $k \neq p$ e $X = \bigcup_k A_k$. Definimos

$$\phi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n (k-1) \chi_{A_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que $-2M \leq \phi_n(x) \leq f(x)$ e $f(x) - \phi_n(x) \leq M/n$ para todo $x \in X$ e todo n . Isto demonstra a proposição. \square

Estamos agora preparados para desenvolver a teoria abstrata da integração. A partir de agora fixaremos um *espaço de medida finita* (X, \mathcal{A}, μ) , isto é, um espaço de medida em que $\mu(X) < \infty$. Dada uma função simples $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, com representação canônica (1.1), definimos sua *integral com relação a μ* como sendo o número real

$$(1.2) \quad \int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_X \phi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

Para estudar as propriedades desta integral iniciamos com o seguinte lema:

Lema 1.1. *Seja ϕ uma função simples escrita na forma*

$$\phi = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k}$$

onde $E_k \in \mathcal{A}$ são tais que $E_k \cap E_p = \emptyset$ se $k \neq p$ e $X = \bigcup_{k=1}^N E_k$. Então

$$\int_X \phi(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^N c_k \mu(E_k).$$

Demonstração. Sejam $\phi(X) = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $A_j = \phi^{-1}(a_j)$. Temos $A_j = \bigcup_{k=1}^N (A_j \cap E_k)$ e $a_j = c_k$ se $A_j \cap E_k \neq \emptyset$. Então

$$a_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^N c_k \mu(A_j \cap E_k)$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^N c_k \mu(A_j \cap E_k) = \sum_{k=1}^N c_k \mu(E_k),$$

o que prova o resultado. □

Proposição 1.7. *Sejam $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Então*

$$\int_X (c\phi(x) + \psi(x)) d\mu(x) = c \int_X \phi(x) d\mu(x) + \int_X \psi(x) d\mu(x).$$

Se, ainda, $\phi \leq \psi$ então

$$\int_X \phi(x) d\mu(x) \leq \int_X \psi(x) d\mu(x).$$

Em particular

$$\int_X \phi(x) d\mu(x) \leq (\sup \phi) \mu(X).$$

Demonstração. Sejam

$$\phi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}, \quad \psi = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{B_k}$$

as representações canônicas de ϕ e ψ respectivamente. Logo podemos escrever

$$\phi = \sum_{j,k} a_{jk} \chi_{A_j \cap B_k}, \quad \psi = \sum_{j,k} b_{jk} \chi_{A_j \cap B_k}.$$

Como então

$$c\phi + \psi = \sum_{j,k} (ca_{jk} + b_{jk}) \chi_{A_j \cap B_k}$$

a primeira afirmação segue do Lema 1.1. Além disto, temos $\phi \leq \psi$ se, e somente se, $a_{jk} \leq b_{jk}$ para todos j e k . Logo, novamente pelo Lema 1.1, segue que $\int_X \phi(x) d\mu(x) \leq \int_X \psi(x) d\mu(x)$ se $\phi \leq \psi$, o que conclui a demonstração. □

Observe então que, como consequência da Proposição 1.7, se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida finita e se $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ são arbitrários então

$$\phi = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j} \implies \int_X \phi(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j).$$

Vamos agora demonstrar o resultado central da teoria.

Teorema 1.1. *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Se f é \mathcal{A} -mensurável então*

$$(1.3) \quad \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_X \psi d\mu : \psi \text{ simples, } \psi \geq f \right\}$$

e a recíproca é verdadeira se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida completo.

Demonstração. Iniciamos tomando a mesma decomposição utilizada para a demonstração da Proposição 1.6. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado e cada $-n \leq k \leq n$ tomamos

$$A_k \doteq \left\{ x \in X : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}.$$

Então, como antes, $A_k \in \mathcal{A}$, $A_k \cap A_p = \emptyset$ se $k \neq p$ e $X = \bigcup_k A_k$. Em particular

$$\mu(X) = \sum_{k=-n}^n \mu(A_k).$$

Sejam então

$$\psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n k \chi_{A_k}, \quad \phi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n (k-1) \chi_{A_k}.$$

Uma vez que $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ obtemos

$$Q_1 \doteq \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq f \right\} \geq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n (k-1) \mu(A_k),$$

$$Q_2 \doteq \inf \left\{ \int_X \psi d\mu : \psi \text{ simples, } \psi \geq f \right\} \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^n k \mu(A_k)$$

e, portanto,

$$0 \leq Q_2 - Q_1 \leq \frac{M\mu(X)}{n}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos a validade de (1.3), isto é, $Q_1 = Q_2$.

Reciprocamente, vamos assumir (1.3) e mostrar que f é mensurável se (X, \mathcal{A}, μ) for um espaço de medida completo.

Para cada n existem ϕ_n, ψ_n funções simples tais que $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$\int_X \psi_n d\mu - \int_X \phi_n d\mu \leq \frac{1}{n}.$$

Pela Proposição 1.5 são \mathcal{A} -mensuráveis as funções

$$\phi^* \doteq \sup_n \phi_n, \quad \psi^* \doteq \inf_n \psi_n$$

e ainda $\phi^* \leq f \leq \psi^*$. Assim, em virtude da Proposição 1.4, basta mostrar que

$$A^* \doteq \{x \in X : \psi^*(x) \neq f(x)\}$$

pertence a \mathcal{A} e que $\mu(A^*) = 0$. Como

$$A^* \subset \{x \in X : \psi^*(x) - \phi^*(x) > 0\}$$

então é suficiente verificar que

$$(1.4) \quad \mu(\{x \in X : \psi^*(x) - \phi^*(x) > 0\}) = 0.$$

Mas

$$\{x \in X : \psi^*(x) - \phi^*(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : \psi^*(x) - \phi^*(x) > 1/k\}}_{\Delta_k}$$

e, para todo n ,

$$\Delta_k \subset \Delta_k^n \doteq \{x \in X : \psi_n(x) - \phi_n(x) > 1/k\}.$$

Como

$$\frac{1}{k} \chi_{\Delta_k^n} \leq \chi_{\Delta_k^n} (\psi_n - \phi_n)$$

temos

$$\frac{\mu(\Delta_k^n)}{k} = \frac{1}{k} \int_X \chi_{\Delta_k^n} d\mu \leq \int_X \chi_{\Delta_k^n} (\psi_n - \phi_n) d\mu \leq \int_X (\psi_n - \phi_n) d\mu \leq \frac{1}{n},$$

isto é, $\mu(\Delta_k) \leq k/n$ para todos k e n . Fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos que $\mu(\Delta_k) = 0$, de onde segue (1.4). □

Definição 1.4. Se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida finita e se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{A} -mensurável e limitada definimos a integral de f com relação à medida μ pela expressão

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq f \right\}.$$

Não é demais enfatizar a consistência desta definição quando a função f é, ela mesmo, uma função simples.

Nosso próximo resultado fornece as propriedades básicas da integral com relação a μ . No seu enunciado utilizaremos a seguinte nomenclatura: dizemos que uma propriedade P vale μ -quase sempre (e abreviaremos μ -q.s.) se o conjunto $A = \{x \in X : P(x) \text{ é falsa}\}$ é \mathcal{A} -mensurável e tem medida μ igual a zero.

Proposição 1.8. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções \mathcal{A} -mensuráveis e limitadas e $c \in \mathbb{R}$. Então*

- (i)
$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu;$$
- (ii)
$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu;$$
- (iii)
$$f = g \text{ } \mu\text{-q.s.} \implies \int_X f d\mu = \int_X g d\mu;$$
- (iv)
$$f \leq g \text{ } \mu\text{-q.s.} \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu;$$
- (v)
$$A \leq f \leq B \implies A\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq B\mu(X);$$
- (vi)
$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Demonstração. Suponha primeiramente $c > 0$. Então

$$\begin{aligned} \int_X cf d\mu &= \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq cf \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X c\phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ c \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq f \right\} \\ &= c \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq f \right\} \\ &= c \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_X (-f) d\mu &= \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ simples, } \phi \leq -f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X (-\psi) d\mu : \psi \text{ simples, } \psi \geq f \right\} \\ &= \sup \left\{ - \int_X \psi d\mu : \psi \text{ simples, } \psi \geq f \right\} \\ &= - \inf \left\{ \int_X \psi d\mu : \psi \text{ simples, } \psi \geq f \right\} \\ &= - \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

Estes dois fatos combinados mostram (i). Mostraremos agora (ii). Sejam $\phi, \tilde{\phi}$ funções simples, $\phi \leq f, \tilde{\phi} \leq g$. Então $\phi + \tilde{\phi}$ é uma função simples e $\phi + \tilde{\phi} \leq f + g$, de onde obtemos

$$\int_X \phi d\mu + \int_X \tilde{\phi} d\mu = \int_X (\phi + \tilde{\phi}) d\mu \leq \int_X (f + g) d\mu.$$

Tomando o supremo entre todas tais ϕ e $\tilde{\phi}$ vem

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu \leq \int_X (f + g) d\mu.$$

Para se obter a desigualdade contrária poderíamos, certamente, proceder analogamente, tomando agora $\psi, \tilde{\psi}$ funções simples, $\psi \geq f, \tilde{\psi} \geq g$. Há, entretanto, um argumento direto. Pela desigualdade já estabelecida,

$$\int_X (f + g) d\mu + \int_X (-g) d\mu \leq \int_X (f + g - g) d\mu = \int_X f d\mu$$

e portanto, por (i),

$$\int_X (f + g) d\mu - \int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Suponha agora que $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função \mathcal{A} -mensurável, $|h| \leq M$ e suponha ainda que $h = 0$ μ -q.s. Seja $A = \{x \in X : h(x) \neq 0\}$. Então $\mu(A) = 0$. Como $\phi = -M\chi_A, \psi = M\chi_A$ são funções simples e $\phi \leq h \leq \psi$ obtemos $\int_X \phi d\mu \leq \int_X h d\mu \leq \int_X \psi d\mu$, o que implica $\int_X h d\mu = 0$. Isto demonstra (iii) e o mesmo argumento também demonstra (iv). Note ainda que (v) segue de (iv).

Finalmente temos $\pm f \leq |f|$ e portanto, de (i) e (iv),

$$\pm \int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu,$$

o que demonstra (vi). □

Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $Y \in \mathcal{A}$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada então $f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{A}_Y -mensurável e limitada e é fácil ver que

$$\int_Y f d\mu \doteq \int_Y (f|_Y) d\mu_Y = \int_X \chi_Y f d\mu.$$

Note também que se $Y, Z \in \mathcal{A}$ são disjuntos então

$$\int_{Y \cup Z} f d\mu = \int_Y f d\mu + \int_Z f d\mu.$$

Finalizaremos este capítulo estudando o comportamento da integral abstrata com relação a sequências de funções mensuráveis. Iniciamos com um resultado auxiliar.

Lema 1.2. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, funções \mathcal{A} -mensuráveis. Suponha que $\lim_n f_n(x)$ exista para cada $x \in X$ e seja $f \doteq \lim_n f_n$. Então dados $\epsilon > 0, \delta > 0$ existem $A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$n \geq n_0, x \in X \setminus A \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.2 sabemos que f é \mathcal{A} -mensurável. Fixado $\epsilon > 0$ definimos

$$G_n \doteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}, \quad A_j \doteq \bigcup_{n=j}^{\infty} G_n.$$

Então $A_j \in \mathcal{A}$, $A_j \supset A_{j+1}$ e $\bigcap_j A_j = \emptyset$, uma vez que $f_n \rightarrow f$ pontualmente. Pelo Corolário 1.1 temos $\mu(A_j) \rightarrow 0$. Observando que

$$X \setminus A_j = \bigcap_{n=j}^{\infty} (X \setminus G_n) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq j\}$$

basta então escolher j_0 tal que $\mu(A_{j_0}) < \delta$ e tomar $n_0 = j_0$, $A = A_{j_0}$. \square

Teorema da Convergência Limitada. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, uma sequência de funções \mathcal{A} -mensuráveis tais que, para algum $M > 0$, temos $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Se $f_n \rightarrow f$ pontualmente em X então $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Pelo Lema 1.2 podemos escolher $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) \leq \epsilon/4M$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_0, x \in X \setminus A \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\mu(X)}.$$

Observando que $|f_n - f| \leq 2M$ obtemos, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| &\leq \int_X |f_n - f| d\mu \\ &= \int_A |f_n - f| d\mu + \int_{X \setminus A} |f_n - f| d\mu \\ &\leq 2M\mu(A) + \frac{\epsilon}{2\mu(X)}\mu(X \setminus A) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Para concluir apresentamos uma aplicação do Teorema da Convergência Limitada que mostra como obter novas medidas a partir de funções não-negativas.

Proposição 1.9. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada. Se $f \geq 0$ então a aplicação*

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A f(x) d\mu(x)$$

é uma medida (finita) sobre \mathcal{A} .

Demonstração. Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, é uma sequência com $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, então

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^p \int_{A_n} f(x) d\mu(x) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^p (\chi_{A_n} f)(x) d\mu(x) = \\ \int_X \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{A_n} f)(x) d\mu(x) &= \int_{\bigcup_n A_n} f(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

A medida e a integral de Lebesgue

Lembramos que um subconjunto I de \mathbb{R} é um intervalo se vale a seguinte propriedade: se $r, s \in I$, $r < s$ e se $r < t < s$ então $t \in I$. Se I é um intervalo limitado definimos seu *comprimento* como sendo o número $L(I) = \sup I - \inf I$. Se I for não limitado convencionamos $L(I) = \infty$ e se $I = \emptyset$ pomos $L(I) = 0$.

Um *intervalo em \mathbb{R}^N* é um conjunto da forma $I = I^{(1)} \times \dots \times I^{(N)}$, onde $I^{(j)}$ são intervalos em \mathbb{R} . Se I é um intervalo de \mathbb{R}^N definimos seu *volume* pela expressão

$$\text{Vol}(I) = L(I^{(1)}) \cdots L(I^{(N)}) \in [0, \infty].$$

Convencionamos $\text{Vol}(I) = 0$ se $L(I^{(j)}) = 0$ para algum $j \in \{1, \dots, N\}$.

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. A *medida exterior de A* é, por definição,

$$(2.1) \quad m^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \text{Vol}(I_n) : A \subset \bigcup_n I_n, \text{ cada } I_n \text{ um intervalo aberto em } \mathbb{R}^N \right\},$$

com a convenção $m^*(A) = \infty$ se o conjunto em (2.1) é da forma $\{\infty\}$.

Estudaremos agora as propriedades da função $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$. Nosso principal objetivo será a construção da σ -álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ dos conjuntos *Lebesgue-mensuráveis*, de tal forma que m^* restrita a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é uma medida, a chamada *medida de Lebesgue*.

Primeiramente observemos os seguintes fatos elementares:

- $m^*(\emptyset) = 0$
- $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$.

Proposição 2.1. *Se I é um intervalo em \mathbb{R}^N então*

$$(2.2) \quad \text{Vol}(I) = m^*(I).$$

Também, se $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $n = 1, 2, \dots$, então

$$(2.3) \quad m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

O passo central para a demonstração de (2.2) é o seguinte resultado:

Lema 2.1. *Sejam I, I_1, \dots, I_n intervalos limitados em \mathbb{R}^N tais que $I \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$. Então*

$$\text{Vol}(I) \leq \sum_{j=1}^n \text{Vol}(I_j).$$

Demonstração. Dado um subconjunto limitado A em \mathbb{R}^N definimos $\lambda(A) = |A \cap \mathbb{Z}^N|$. Note as seguintes propriedades:

- Se $A \subset B$ são limitados em \mathbb{R}^N então $\lambda(A) \leq \lambda(B)$;
- Se A e B são limitados em \mathbb{R}^N então $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$;
- Se $I = I^{(1)} \times \dots \times I^{(N)}$ é um intervalo limitado em \mathbb{R}^N então $\lambda(I) = \lambda(I^{(1)}) \dots \lambda(I^{(N)})$.

Seja agora J um intervalo limitado em \mathbb{R} . Se $a = \inf J$, $b = \sup J$ e se $[x]$ denota a parte inteira do número real x então teremos, se $a \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda(J) \leq \lambda([a, [b] + 1]) = [b] - a + 1 \leq b - a + 1,$$

enquanto que, se $a \notin \mathbb{Z}$,

$$\lambda(J) \leq \lambda([a], [b] + 1]) = [b] - [a] \leq b - a + 1.$$

Analogamente,

$$\lambda(J) \geq b - a - 1$$

e assim podemos escrever

$$\sup J - \inf J - 1 \leq \lambda(J) \leq \sup J - \inf J + 1.$$

Se $J = J^{(1)} \times \dots \times J^{(N)}$ é um intervalo limitado de \mathbb{R}^N , com $\sup J^{(k)} - \inf J^{(k)} \geq 1$ para todo k , temos portanto

$$\prod_{k=1}^N (\sup J^{(k)} - \inf J^{(k)} - 1) \leq \lambda(J) \leq \prod_{k=1}^N (\sup J^{(k)} - \inf J^{(k)} + 1).$$

Após estas considerações retornamos à demonstração do Lema 2.1 (em que podemos assumir $\text{Vol}(I) > 0$). Para $t > 0$ temos $tI \subset tI_1 \cup \dots \cup tI_n$. Escrevendo

$$I = I^{(1)} \times \dots \times I^{(N)}, \quad I_j = I_j^{(1)} \times \dots \times I_j^{(N)}, \quad j = 1, \dots, n$$

o argumento acima mostra que para $t \geq t_0$, onde t_0 é tomado grande o suficiente,

$$\prod_{k=1}^N (t \sup I^{(k)} - t \inf I^{(k)} - 1) \leq \sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=1}^N (t \sup I_j^{(k)} - t \inf I_j^{(k)} + 1) \right).$$

Dividindo por t^N e tomando $t \rightarrow \infty$ obtemos a conclusão do Lema 2.1. \square

Demonstração da Proposição 2.1. Vamos primeiramente tratar do caso em que I é limitado. É fácil ver que $\mathfrak{m}^*(I) \leq \text{Vol}(I)$: de fato, dado $\epsilon > 0$ tomemos I_n , $n = 1, 2, \dots$, de tal forma que I_1 é um intervalo aberto contendo I com $\text{Vol}(I_1) = \text{Vol}(I) + \epsilon$ e $I_n = \emptyset$ se $n \geq 2$. Então, por definição, $\mathfrak{m}^*(I) \leq \text{Vol}(I) + \epsilon$, com $\epsilon > 0$ arbitrário.

Para demonstrarmos a desigualdade na outra direção suponhamos primeiramente que I seja compacto. Seja então $\epsilon > 0$ e tomemos uma sequência de intervalos abertos I_m tais que

$$I \subset \bigcup_m I_m, \quad \sum_m \text{Vol}(I_m) \leq \mathfrak{m}^*(I) + \epsilon.$$

Como I é compacto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$. Assim, pelo Lema 2.1 podemos escrever

$$\text{Vol}(I) \leq \sum_{m=1}^n \text{Vol}(I_m) \leq \sum_m \text{Vol}(I_m) \leq \mathbf{m}^*(I) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos então que $\text{Vol}(I) \leq \mathbf{m}^*(I)$, o demonstra (2.2) quando I é compacto.

Agora, se I é limitado e se $\epsilon > 0$ existe $I_\epsilon \subset I$ compacto tal que $\text{Vol}(I) \leq \text{Vol}(I_\epsilon) + \epsilon$. Logo

$$\text{Vol}(I) \leq \text{Vol}(I_\epsilon) + \epsilon = \mathbf{m}^*(I_\epsilon) + \epsilon \leq \mathbf{m}^*(I) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $\text{Vol}(I) \leq \mathbf{m}^*(I)$, o demonstra (2.2) no caso I limitado.

Se I é não limitado com $\text{Vol}(I) = \infty$ então I conterá intervalos limitados com volume arbitrariamente grandes, o que implica $\mathbf{m}^*(I) = \infty$. Se I é não limitado mas com volume nulo então podemos assumir que, após uma possível permutação das coordenadas, que I está contido em um intervalo da forma $\{x_0\} \times \mathbb{R}^{N-1}$. Seja $\epsilon > 0$ e tomemos $I_n =]x_0 - 2^{-2n}\epsilon, x_0 + 2^{-2n}\epsilon[\times J_n$ onde $J_n, n = 1, 2, \dots$, é uma sequência de intervalos abertos em \mathbb{R}^{N-1} satisfazendo

$$\mathbb{R}^{N-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \text{Vol}(J_n) = 2^{n-1}.$$

Então

$$\mathbf{m}^*(\{x_0\} \times \mathbb{R}^{N-1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{2n-1}} 2^{n-1} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon.$$

A demonstração de (2.2) está completa. Para a demonstração de (2.3) podemos assumir que $\mathbf{m}^*(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$ podemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar uma sequência de intervalos abertos $I_{n,k}, k = 1, 2, \dots$, tal que

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}(I_{n,k}) \leq \mathbf{m}^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Mas então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,k=1}^{\infty} I_{n,k}$$

e portanto

$$\mathbf{m}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \text{Vol}(I_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}^*(A_n) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue (2.3), o que conclui a demonstração. \square

Definição 2.1. Um subconjunto A de \mathbb{R}^N é Lebesgue-mensurável se satisfaz a seguinte propriedade:

$$(2.4) \quad \mathbf{m}^*(B) = \mathbf{m}^*(B \cap A) + \mathbf{m}^*(B \cap (\mathbb{R}^N \setminus A)), \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N).$$

Um vez que $B = (B \cap A) \cup (B \cap (\mathbb{R}^N \setminus A))$, pela Proposição 2.1 segue que $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ é Lebesgue-mensurável se, e somente se,

$$(2.5) \quad \mathfrak{m}^*(B) \geq \mathfrak{m}^*(B \cap A) + \mathfrak{m}^*(B \cap (\mathbb{R}^N \setminus A)), \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N).$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ a classe de todos os subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de \mathbb{R}^N . O seguinte resultado é fundamental.

Teorema 2.1. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{R}^N e $\mathfrak{m} \doteq \mathfrak{m}^*|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)}$ é uma medida, denominada medida de Lebesgue em \mathbb{R}^N . Além disso, $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \mathfrak{m})$ é um espaço de medida completo.

Demonstração. É muito fácil ver que $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ implica $\mathbb{R}^N \setminus A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e que $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ implica $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $\{\emptyset, \mathbb{R}^N\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Temos então que mostrar dois fatos:

$$(2.6) \quad A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \quad n = 1, 2, \dots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N);$$

$$(2.7) \quad A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \quad n = 1, 2, \dots \text{ dois a dois disjuntos} \implies \mathfrak{m}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n).$$

As demonstrações de (2.6) e (2.7) serão feitas através de vários passos.

(i) $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, se $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{m}^*[B \cap (A_1 \cup A_2)] + \mathfrak{m}^*[B \cap (\mathbb{R}^N \setminus (A_1 \cup A_2))] \\ & \leq \mathfrak{m}^*[B \cap A_1] + \mathfrak{m}^*[B \cap A_2 \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_1)] + \mathfrak{m}^*[B \cap (\mathbb{R}^N \setminus (A_1 \cup A_2))] \\ & = \mathfrak{m}^*[B \cap A_1] + \mathfrak{m}^*[B \cap A_2 \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_1)] + \mathfrak{m}^*[B \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_1) \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_2)] \\ & = \mathfrak{m}^*[B \cap A_1] + \mathfrak{m}^*[B \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_1)] \\ & = \mathfrak{m}^*(B), \end{aligned}$$

onde, na primeira desigualdade, usamos a identidade

$$B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2 \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_1))$$

juntamente com a Proposição 2.1, e nas duas últimas igualdades usamos, respectivamente, os fatos que A_2 e A_1 são Lebesgue-mensuráveis.

(ii) Se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ são dois a dois disjuntos e se $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ então

$$(2.8) \quad \mathfrak{m}^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathfrak{m}^*(B \cap A_j).$$

A demonstração de (2.8) se faz por indução sobre n , o caso $n = 1$ sendo trivial. Assuma então a validade de (2.8) para $n - 1$. Temos

$$B \cap \bigcup_{j=1}^n A_j \cap A_n = B \cap A_n, \quad B \cap \bigcup_{j=1}^n A_j \cap (\mathbb{R}^N \setminus A_n) = B \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j.$$

Como $A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ temos então que

$$m^* \left(B \cap \bigcup_{j=1}^n A_j \right) = m^*(B \cap A_n) + m^* \left(B \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right)$$

e portanto (2.8) segue da hipótese de indução.

Tomando $B = \mathbb{R}^N$ em (2.8) segue que

$$(2.9) \quad m^* \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \sum_{j=1}^n m^*(A_j).$$

(iii) Se $A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, $n = 1, 2, \dots$, então $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Sejam

$$A_1^\bullet = A_1, \quad A_n^\bullet = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Então $A_n^\bullet \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n^\bullet \cap A_m^\bullet = \emptyset$ se $m \neq n$ e $\bigcup_n A_n = \bigcup_n A_n^\bullet$. Ademais, se $p \in \mathbb{N}$ e $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, por (ii) temos que

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^* \left(B \cap \bigcup_{n=1}^p A_n^\bullet \right) + m^* \left[B \cap \left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=1}^p A_n^\bullet \right) \right] \\ &\geq m^* \left(B \cap \bigcup_{n=1}^p A_n^\bullet \right) + m^* \left[B \cap \left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^p m^*(B \cap A_n^\bullet) + m^* \left[B \cap \left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet \right) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo $p \rightarrow \infty$, pela Proposição 2.1 obtemos finalmente

$$\begin{aligned} m^*(B) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B \cap A_n^\bullet) + m^* \left[B \cap \left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet \right) \right] \\ &\geq m^* \left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet \right) + m^* \left[B \cap \left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet \right) \right] \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de (iii).

Vamos agora mostrar que m é uma medida. Para tal tomemos uma sequência $A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, $n = 1, 2, \dots$, com $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $m \neq n$. De (2.9) podemos escrever

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \geq m^* \left(\bigcup_{n=1}^p A_n \right) = \sum_{n=1}^p m^*(A_n)$$

para todo $p \in \mathbb{N}$. Fazendo $p \rightarrow \infty$ segue então que

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n),$$

o que demonstra nossa afirmação.

Finalmente, uma vez que todo subconjunto de \mathbb{R}^N com medida exterior nula é Lebesgue-mensurável, segue a última afirmação do enunciado. A demonstração do Teorema 2.1 está completa. \square

Teorema 2.2. *Se $I \subset \mathbb{R}^N$ é um intervalo então $I \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ (e portanto $m(I) = \text{Vol}(I)$).*

Demonstração. Basta mostrar que intervalos da forma $I = \mathbb{R}^p \times J \times \mathbb{R}^q$ são Lebesgue-mensuráveis. Aqui J é um intervalo em \mathbb{R} com $\inf J > -\infty$, $\sup J = \infty$ e $p, q \in \{1, \dots, N\}$ são tais que $p + q = N - 1$.

Seja $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ arbitrário. Devemos mostrar a validade de (2.5), com I substituindo A e, portanto, não há perda de generalidade em assumir que $m^*(B) < \infty$.

Seja $\epsilon > 0$ e tomemos uma sequência de intervalos abertos I_n , $n = 1, 2, \dots$, tais que

$$B \subset \bigcup_n I_n, \quad \sum_n \text{Vol}(I_n) \leq m^*(B) + \epsilon.$$

Se definirmos $I'_n \doteq I_n \cap I$, $I''_n \doteq I_n \cap (\mathbb{R}^N \setminus I)$ então I'_n, I''_n serão também intervalos e

$$\text{Vol}(I_n) = \text{Vol}(I'_n) + \text{Vol}(I''_n) = m^*(I'_n) + m^*(I''_n).$$

Note então que

$$m^*(B \cap I) \leq \sum_n m^*(I'_n), \quad m^*(B \cap (\mathbb{R}^N \setminus I)) \leq \sum_n m^*(I''_n)$$

e portanto

$$m^*(B \cap I) + m^*(B \cap (\mathbb{R}^N \setminus I)) \leq \sum_n \text{Vol}(I_n) \leq m^*(B) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado fica demonstrado. \square

Se $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ definimos $\mathcal{M}(X)$ como sendo a σ -álgebra de todos os subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de X . De acordo com a notação do Capítulo 1

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)|_X.$$

Corolário 2.1. *Se $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ então todo subconjunto aberto de X é Lebesgue-mensurável, isto é, pertence a $\mathcal{M}(X)$. Em particular, toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável e são também Lebesgue-mensuráveis todo fechado de X , toda intersecção enumerável de abertos de X e toda reunião enumerável de fechados de X .*

Demonstração. Todo aberto de X é da forma $\Omega \cap X$, onde Ω é aberto de \mathbb{R}^N . Por outro lado, todo aberto de \mathbb{R}^N pode ser expresso como uma reunião enumerável de intervalos abertos. Agora, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f^{-1}(]a, \infty[)$ é aberto de X , o que demonstra que f é Lebesgue-mensurável. As outras afirmações são imediatas. \square

Se $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é tal que $\mathbf{m}(X) < \infty$ (em particular se X é limitado) então $(X, \mathcal{M}(X), \mathbf{m})$ é um espaço de medida finita e completo (aqui nos permitimos um pequeno abuso de notação, denotando também por \mathbf{m} a restrição da medida de Lebesgue a $\mathcal{M}(X)$). Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{M}(X)$ -mensurável e limitada então está definida sua integral

$$\int_X f(x) d\mathbf{m}(x) = \int_X f d\mathbf{m},$$

denominada a *integral de Lebesgue de f sobre X* .

Finalizaremos este capítulo recordando o conceito de integral de Riemann.

Uma *partição de $[a, b]$* é uma seqüência de pontos de $[a, b]$ da forma $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Uma função $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função escada* se existir uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de tal forma que S é constante (digamos igual a c_i) em cada intervalo $]x_{i-1}, x_i]$. Para tais S definimos sua *integral de Riemann* como sendo o número

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Seja agora $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Definimos

$$I_-(f; a, b) \doteq \sup \left\{ \int_a^b S(x) dx, S \text{ escada}, S \leq f \right\},$$

$$I_+(f; a, b) \doteq \inf \left\{ \int_a^b S(x) dx, S \text{ escada}, S \geq f \right\}$$

e dizemos que f é *Riemann integrável em $[a, b]$* se $I_-(f; a, b) = I_+(f; a, b)$. Este valor comum denomina-se *integral de Riemann sobre $[a, b]$* e é denotado por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Se f é Riemann integrável então f é $\mathcal{M}([a, b])$ -mensurável e*

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mathbf{m}(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstração. Como toda função escada é necessariamente simples, e como também

$$\int_a^b S(x) dx = \int_{[a,b]} S(x) d\mathbf{m}(x)$$

se S é uma função escada, temos

$$\begin{aligned}
 I_-(f; a, b) &= \sup \left\{ \int_a^b S(x) dx, S \text{ escada}, S \leq f \right\} \\
 &\leq \sup \left\{ \int_{[a,b]} \phi(x) dm(x), \phi \text{ simples}, \phi \leq f \right\} \\
 &\leq \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi(x) dm(x), \psi \text{ simples}, \psi \geq f \right\} \\
 &\leq \inf \left\{ \int_a^b S(x) dx, S \text{ escada}, S \geq f \right\} \\
 &= I_+(f; a, b).
 \end{aligned}$$

Basta então aplicar o Teorema 1.1. □

Uma consequência interessante do Teorema da Convergência Limitada da integral abstrata é o seguinte resultado, válido para a integral de Riemann.

Corolário 2.2. *Sejam $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, uma sequência de funções Riemann-integráveis e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f_n \rightarrow f$ pontualmente em $[a, b]$. Se f é Riemann integrável e se existir $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$ e todo $n = 1, 2, \dots$, então*

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Resultados análogos valem para a integral de Riemann em um intervalo compacto

$$K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \subset \mathbb{R}^N.$$

Em particular, se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então

$$\int_K f(x) dm(x) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N,$$

onde a integral iterada à direita pode ser executada em qualquer ordem.

Finalizamos apresentando um exemplo de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue mensurável e limitada mas que não é Riemann integrável. Sejam $A = \{x \in [0, 1] : x \notin \mathbb{Q}\}$ e $f \doteq \chi_A$. Note que $A \in \mathcal{M}([0, 1])$ uma vez que $[0, 1] \setminus A$ é enumerável e portanto tem medida exterior nula. Também é fácil ver que

$$I_-(f; 0, 1) = 0, \quad I_+(f; 0, 1) = 1,$$

o que mostra que f não é Riemann integrável. Note que

$$\int_{[0,1]} f(x) dm(x) = 1.$$

CAPÍTULO 3

O Teorema de mudança de variável na integral de Lebesgue

Primeiramente introduzimos uma notação. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto escreveremos $E \subset\subset \Omega$ para indicar que o fecho de E em \mathbb{R}^N é um subconjunto compacto de Ω . O seguinte resultado elementar será bastante utilizado:

Lema 3.1. *Se $E \subset\subset \Omega$ então existe $U \subset\subset \Omega$ aberto, $E \subset\subset U$.*

Demonstração. Se $k \in \mathbb{N}$ é escolhido suficientemente grande então \bar{E} estará contido em $U \doteq \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k, |x| < k\}$. □

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 é chamada *difeomorfismo de classe C^1* se f é injetora, $f(\Omega)$ é aberto e $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$ também é de classe C^1 .

Para cada $x \in \Omega$ denotamos por $f'(x) \in L(\mathbb{R}^N)$ a derivada de f no ponto x . O fato de f ser de classe C^1 implica que $x \mapsto f'(x)$ é uma função contínua definida em Ω e a valores em $L(\mathbb{R}^N)$. Como f é, além disso, um difeomorfismo de classe C^1 , segue $f'(x) \in GL(\mathbb{R}^N)^1$ para todo $x \in \Omega$, o que é equivalente a dizer que a função contínua $x \mapsto \det f'(x)$, definida em Ω e a valores reais, nunca se anula. Não é demais lembrar que $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$, para todo $x \in \Omega$. Ainda notamos que se $E \subset\subset \Omega$ então $f(E) \subset\subset f(\Omega)$.

Teorema de Mudança de Variável. *Seja $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ um difeomorfismo de classe C^1 . Se $E \subset\subset \Omega$ é $\mathcal{M}(\Omega)$ -mensurável então $f(E)$ é $\mathcal{M}(f(\Omega))$ -mensurável e*

$$(TMV) \quad m(f(E)) = \int_E |\det f'(x)| \, dm(x).$$

Como corolário obtemos:

Corolário 3.1. *Sejam $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ um difeomorfismo de classe C^1 e $E \subset\subset \Omega$, $E \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se $u : f(E) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável então $u \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável. Se além disto, u é limitada então*

$$(3.1) \quad \int_{f(E)} u(y) dm(y) = \int_E u(f(x)) |\det f'(x)| \, dm(x).$$

Demonstração do Corolário 3.1. Que $u \circ f$ é Lebesgue-mensurável, se u o for, é uma consequência imediata do teorema acima. Tomemos, primeiramente, $u = \chi_A$, onde $A \in$

¹Como usual denotamos por $GL(\mathbb{R}^N)$ o grupo de todas as transformações $A \in L(\mathbb{R}^N)$ que são inversíveis.

$\mathcal{M}(f(E))$. Então $u \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$ e portanto

$$\int_E \chi_A(f(x)) |\det f'(x)| \, d\mathbf{m}(x) = \int_{f^{-1}(A)} |\det f'(x)| \, d\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(A) = \int_{f(E)} \chi_A(y) \, d\mathbf{m}(y).$$

Pelas propriedades de linearidade da integral abstrata segue que (3.1) vale para funções simples definidas em $f(E)$.

Dada agora uma função u como no enunciado podemos determinar, de acordo com a Proposição 1.6, uma sequência uniformemente limitada de funções simples $\phi_n : f(E) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_n \leq u$ para todo n , satisfazendo $\phi_n(y) \rightarrow u(y)$, $y \in f(E)$. Do Teorema da Convergência Limitada segue que

$$\begin{aligned} \int_{f(E)} u(y) \, d\mathbf{m}(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f(E)} \phi_n(y) \, d\mathbf{m}(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \phi_n(f(x)) |\det f'(x)| \, d\mathbf{m}(x) \\ &= \int_E u(f(x)) |\det f'(x)| \, d\mathbf{m}(x). \end{aligned} \quad \square$$

O restante do capítulo será devotado à demonstração do Teorema de Mudança de Variável. Começamos recordando a desigualdade do valor médio: se $D \subset\subset \Omega$ é um conjunto convexo então

$$(3.2) \quad |f(x) - f(y)| \leq \left(\sup_{z \in D} \|f'(z)\| \right) |x - y|, \quad x, y \in D.$$

Esta propriedade admite a seguinte extensão:

Lema 3.2. *Seja $K \subset\subset \Omega$ compacto. Então existe $C > 0$ tal que*

$$(3.3) \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in K.$$

Demonstração. Suponha que (3.3) não seja verdadeira. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existirão $x_n, y_n \in K$ tais que

$$(3.4) \quad n|x_n - y_n| < |f(x_n) - f(y_n)| \leq 2a,$$

onde $a > 0$ é tal que $|f| \leq a$ em K . Passando a subsequências se necessário podemos assumir que $x_n \rightarrow x_0 \in K$, $y_n \rightarrow y_0 \in K$. Uma vez que (3.4) implica $|x_n - y_n| < 2a/n$ concluímos que $x_0 = y_0$. Tomemos agora $r > 0$ tal que $D \doteq \{x : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$ e seja $M = \sup\{\|f'(z)\| : z \in D\}$. Por (3.2) obtemos

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in D.$$

Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n, y_n \in D$ se $n \geq n_0$ obtemos então

$$n|x_n - y_n| < |f(x_n) - f(y_n)| \leq M|x_n - y_n|, \quad n \geq n_0,$$

o que é absurdo. □

Lema 3.3. *Seja $E \subset\subset \Omega$. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência de intervalos abertos I_n , $n = 1, 2, \dots$, tais que $I_n \subset \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \bigcup_n I_n$ e $\sum_n \text{Vol}(I_n) < \mathbf{m}^*(E) + \epsilon$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência de intervalos abertos I_n^\bullet , $n = 1, 2, \dots$, tal que $E \subset \bigcup_n I_n^\bullet$ e $\sum_n \text{Vol}(I_n^\bullet) < m^*(E) + \epsilon/2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ decomponemos

$$\overline{I_n^\bullet} = J_{n,1} \cup \dots \cup J_{n,k_n},$$

onde cada $J_{n,k}$ é um intervalo compacto e

$$\text{Vol}(I_n^\bullet) = \text{Vol}(J_{n,1}) + \dots + \text{Vol}(J_{n,k_n}), \quad \text{diam}(J_{n,k}) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(E, \mathbb{R}^N \setminus \Omega).$$

Com tal escolha temos

$$J_{n,k} \cap E \neq \emptyset \implies J_{n,k} \subset \Omega.$$

Provemos esta afirmação: fixemos $y_\star \in J_{n,k} \cap E$ e tomemos $x \in J_{n,k}$ arbitrário. Logo

$$|x - y_\star| \leq \text{diam}(J_{n,k}) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(E, \mathbb{R}^N \setminus \Omega).$$

Como também

$$|\text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \text{dist}(y_\star, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)| \leq |x - y_\star|$$

segue que

$$\text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \text{dist}(y_\star, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) - \frac{1}{2} \text{dist}(E, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(E, \mathbb{R}^N \setminus \Omega).$$

Tomando então somente os intervalos $J_{n,k}$ que interceptam E obteremos uma sequência de intervalos compactos J_n , $n = 1, 2, \dots$, satisfazendo

$$J_n \subset \subset \Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{Vol}(J_n) < m^*(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Para concluir a demonstração basta, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomar um intervalo aberto $I_n \subset \Omega$ contendo J_n e tal que $\text{Vol}(I_n) \leq \text{Vol}(J_n) + \epsilon/2^{n+1}$. \square

Sejam E como no Lema 3.3 e $\Omega' \subset \subset \Omega$ aberto, $E \subset \subset \Omega'$. Aplicando o Lema 3.3 com Ω' substituindo Ω obtemos, para cada $\epsilon > 0$, um aberto $\mathcal{O} = \bigcup_n I_n \subset \Omega'$ satisfazendo

$$\mathcal{O} \subset \subset \Omega, \quad m(\mathcal{O}) < m^*(E) + \epsilon.$$

Assim podemos provar:

Corolário 3.2. Se $E \subset \subset \Omega$ então existe $G \subset \subset \Omega$ da forma $G = \bigcap_n U_n$, onde cada $U_n \subset \subset \Omega$ é aberto, tal que $m^*(E) = m^*(G)$. Note que, em particular, $G \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Demonstração. Pela observação precedente dado $n \in \mathbb{N}$ existe um aberto $U_n \subset \subset \Omega$ tal que $E \subset U_n$ e $m^*(U_n) \leq m^*(E) + 1/n$. Definindo então G como no enunciado teremos $m^*(E) \leq m^*(G) \leq m^*(E) + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue que $m^*(E) = m^*(G)$. \square

Por um cubo em \mathbb{R}^N entendemos um intervalo limitado da forma $I_1 \times \dots \times I_N$, onde $\text{L}(I_1) = \dots = \text{L}(I_N)$. Note que se I é um cubo em \mathbb{R}^N então

$$\text{Vol}(I) = \text{diam}(I)^N / N^{N/2}.$$

A noção de cubo juntamente com o Exercício 2 permitem então demonstrar o seguinte resultado:

Lema 3.4. *Se $E \subset \subset \Omega$ é tal que $m^*(E) = 0$ então $m^*(f(E)) = 0$.*

Demonstração. Primeiramente tomamos $U \subset \subset \Omega$ aberto tal que $E \subset \subset U$. A seguir escolhemos $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ é satisfeita para todos $x, y \in U$. Em particular temos

$$(3.5) \quad A \subset U \implies \text{diam} f(A) \leq C \text{diam}(A).$$

Seja $\epsilon > 0$. Pelo Exercício 2 do Capítulo 3 existe uma sequência de cubos compactos $I_n \subset U$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $E \subset \bigcup_n I_n$ e $\sum_n \text{Vol}(I_n) < \epsilon$.

Logo $f(E) \subset \bigcup_n f(I_n)$ e portanto

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(I_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(f(I_n))^N \leq C^N \sum_{n=1}^{\infty} \text{diam}(I_n)^N,$$

onde na terceira desigualdade usamos (3.5) e na segunda usamos o fato elementar que todo conjunto limitado de \mathbb{R}^N está contido em um intervalo com arestas de comprimento igual a seu diâmetro. Uma vez que $\text{diam}(I_n)^N = N^{N/2} \text{Vol}(I_n)$ obtemos finalmente

$$m^*(f(E)) \leq C^N N^{N/2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Vol}(I_n) < C^N N^{N/2} \epsilon,$$

o que demonstra o resultado. \square

Corolário 3.3. *Seja $E \subset \subset \Omega$ Lebesgue-mensurável. Então $f(E)$ é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.2 existe $G \doteq \bigcap_n U_n \supset E$, com cada $U_n \subset \subset \Omega$ aberto e com $m^*(E) = m^*(G)$. Como E é Lebesgue-mensurável temos

$$m(G) = m(E) + m(G \setminus E)$$

e portanto $m(G \setminus E) = 0$. Pelo Lema 3.4 temos $m^*(f(G \setminus E)) = 0$ e portanto $f(G \setminus E) \in \mathcal{M}(f(\Omega))$. Como também f é um homeomorfismo temos $f(G) = \bigcap_n f(U_n)$, onde cada $f(U_n)$ também é aberto. Em particular $f(G) \in \mathcal{M}(f(\Omega))$ e portanto $f(E) = f(G) \setminus f(G \setminus E) \in \mathcal{M}(f(\Omega))$. \square

Assim, para concluir a demonstração do Teorema de Mudança de Variável temos que mostrar a validade de (TMV), o que será feito em vários passos.

Passo 1. *Se (TMV) vale para C^1 -difeomorfismos $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ e $g : f(\Omega) \rightarrow g(f(\Omega))$ então (TMV) vale para $g \circ f : \Omega \rightarrow (g \circ f)(\Omega)$.*

De fato, se $E \subset \subset \Omega$ é Lebesgue-mensurável então, pelo Corolário 3.1,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(E) = g(f(E)) &= \int_{f(E)} |\det g'(y)| dm(y) = \int_E |\det g'(f(x))| \cdot |\det f'(x)| dm(x) = \\ &= \int_E |\det (g'(f(x)) \circ f'(x))| dm(x) = \int_E |\det (g \circ f)'(x)| dm(x). \end{aligned}$$

Passo 2. *Se (TMV) vale para $E = I \subset \subset \Omega$, onde I é um intervalo arbitrário, então (TMV) vale em geral.*

Pelo Teorema da Convergência Limitada, (TMV) vale para $E = \bigcup_n I_n \subset \Omega$, onde I_n , $n = 1, 2, \dots$, é uma sequência de intervalos. De fato, não é difícil mostrar que podemos escrever $E = \bigcup_n I_n = \bigcup_n J_n$, onde agora J_n , $n = 1, 2, \dots$, é uma sequência de intervalos dois a dois disjuntos, temos (cf. Proposição 1.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \left(f \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \right) &= \mathbf{m} \left(f \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right) \right) \\ &= \mathbf{m} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(J_n) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(f(J_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} |\det f'(x)| \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \\ &= \int_{\bigcup_n J_n} |\det f'(x)| \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \\ &= \int_{\bigcup_n I_n} |\det f'(x)| \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x). \end{aligned}$$

Seja então $E \subset \Omega$ Lebesgue-mensurável. Como na demonstração do Corolário 3.2, para cada k existe $U_k \subset \Omega$ aberto tal que $E \subset U_k$ e $\mathbf{m}(U_k \setminus E) < 1/k$. Além disso, cada U_k é igual a uma reunião enumerável de intervalos abertos. Se definirmos $B_k = U_1 \cap \dots \cap U_k$ então cada B_k também será uma reunião enumerável de intervalos abertos, donde concluímos que

- (a) $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset E$;
- (b) (TMV) vale para cada B_k ;
- (c) $\mathbf{m}(B_k \setminus E) < 1/k$.

Seja $C \doteq \bigcap_k B_k \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então $E \subset C$ e $\mathbf{m}(C \setminus E) = 0$, uma vez que $C \setminus E \subset B_k \setminus E$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.4

$$\mathbf{m}(f(C)) = \mathbf{m}(f(E)) + \mathbf{m}(f(C \setminus E)) = \mathbf{m}(f(E))$$

e portanto, novamente pela Proposição 1.9,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(f(E)) &= \mathbf{m}(f(C)) \\ &= \mathbf{m} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} f(B_k) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{m}(f(B_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} |\det f'(x)| \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_E |\det f'(x)| \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) + \int_{B_k \setminus E} |\det f'(x)| \, \mathbf{d}\mathbf{m}(x) \right]. \end{aligned}$$

Agora se $b \doteq \sup_{B_1} |\det f'|$ então $b < \infty$ e

$$\left| \int_{B_k \setminus E} |\det f'(x)| dm(x) \right| \leq b m(B_k \setminus E) \leq \frac{b}{k} \longrightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty,$$

e portanto (TMV) segue.

Passo 3. Se (TMV) vale para $E = J \subset\subset \Omega$, onde J é um intervalo compacto qualquer, então (TMV) vale em geral.

Seja $I \subset\subset \Omega$ um intervalo arbitrário e tomemos uma sequência de intervalos compactos $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset I$, $\bigcup_n J_n = I$. Temos

$$\begin{aligned} m(f(I)) &= m\left(f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right)\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(J_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(f(J_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} |\det f'(x)| dm(x) \\ &= \int_I |\det f'(x)| dm(x) \end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Limitada. Logo, pelo passo 3, (TMV) segue em geral. \square

Passo 4. (TMV) é válida para $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $A(x_1, \dots, x_N) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$, onde $\sigma \in S^N$.

De fato, se $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ então $A(I) = [a_{\sigma(1)}, b_{\sigma(1)}] \times \dots \times [a_{\sigma(N)}, b_{\sigma(N)}]$ e $\det A$ é igual ao sinal de σ ($\det A = \pm 1$).

Passo 5. (TMV) é válida para translações $f(x) = x + a$.

De fato $\det f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\text{Vol}(a + I) = \text{Vol}(I)$ para todo intervalo I .

Passo 6. (TMV) é válida para C^1 -difeomorfismos $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ da forma

$$(3.6) \quad f(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, h(x), x_{j+1}, \dots, x_N),$$

onde $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 .

De fato, pelo passo 4 podemos assumir que $f(x) = (x_1, \dots, x_{N-1}, h(x)) = (x', h(x))$. Temos

$$\det f'(x) = \frac{\partial h}{\partial x_N}(x) \neq 0 \text{ em } \Omega.$$

Seja I um intervalo compacto contido em Ω , $I = I' \times [a_N, b_N]$. Como I é conexo então ou $\det f'(x) > 0$ em I ou $\det f'(x) < 0$ em I . Vamos assumir então que $(\partial h / \partial x_N) > 0$ em I . Notando que

$$f(I) = \{(x', x_N) : x' \in I', h(x', a_N) \leq x_N \leq h(x', b_N)\},$$

tomando $J = I' \times [m, M]$, em que

$$m = \min_{x' \in I'} h(x', a_N), \quad M = \max_{x' \in I'} h(x', b_N),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_I |\det f'(x)| dm(x) &= \int_I \frac{\partial h}{\partial x_N}(x) dm(x) \\
&\stackrel{*}{=} \int_{I'} \left\{ \int_{a_N}^{b_N} \frac{\partial h}{\partial x_N}(x', x_N) dx_N \right\} dx' \\
&= \int_{I'} \int_{h(x', a_N)}^{h(x', b_N)} dx_n dx' \\
&= \int_J \chi_{f(I)}(x) dx \\
&\stackrel{*}{=} \int_J \chi_{f(I)}(x) dm(x) = m(f(I)),
\end{aligned}$$

onde em (*) usamos a igualdade entre a integral de Riemann e a integral de Lebesgue. \square

Passo 7. *Suponha que para cada $x \in \Omega$ existe $U_x \subset \Omega$ aberto, $x \in U_x$, tal que (TMV) vale para $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$. Então (TMV) vale em geral.*

Seja $I \subset \subset \Omega$ um intervalo compacto. Existe um recobrimento abertos $\{U_\alpha\}$ de I tal que (TMV) vale para $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow f(U_\alpha)$, $\forall \alpha$. Seja $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue da cobertura $\{U_\alpha \cap I\}$ do compacto I . Podemos decompor $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$ em intervalos dois a dois disjuntos com $\text{diam}(I_j) < \epsilon$, $j = 1, \dots, n$. Como para todo j existe α_j tal que $\bar{I}_j \subset U_{\alpha_j}$ temos então

$$m(f(I)) = \sum_{j=1}^n m(f(I_j)) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} |\det f'(x)| dm(x) = \int_I |\det f'(x)| dm(x).$$

Agora faremos uma pausa para apresentar um resultado sobre decomposição de aplicações de classe C^1 . Daremos primeiramente uma definição.

Definição 3.1. (a) *Uma aplicação $A \in L(\mathbb{R}^N)$ é dita elementar se existem $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tais que $Ae_i = e_j$, $Ae_j = e_i$ e $Ae_k = e_k$ se $k \neq i, j$. Aqui $\{e_1, \dots, e_N\}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^N .*

(b) *Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 , definida em um aberto Ω de \mathbb{R}^N , é chamada primitiva se existem $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $j \in \{1, \dots, N\}$ tais que f se escreve como em (3.6).*

Temos então a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto contendo a origem e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 com $F(0) = 0$ e $F'(0) \in GL(\mathbb{R}^N)$. Então em uma vizinhança da origem podemos escrever*

$$(3.7) \quad F(x) = A_1 \cdots A_{N-1} G_N \circ \cdots \circ G_1(x),$$

onde cada A_j é uma aplicação elementar, e cada G_j é uma aplicação primitiva definida em uma vizinhança da origem e satisfazendo $G_j(0) = 0$, $G'_j(0) \in GL(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Escrevendo $F(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x))$ temos

$$F'(0)e_1 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_1}(0)e_j$$

Como $F'(0)$ é inversível segue que $F'(0)e_1 \neq 0$ e que portanto existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que

$$(3.8) \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_1}(0) \neq 0.$$

Seja A_1 a transformação elementar dada por $Ae_1 = e_k$, $Ae_k = e_1$, $Ae_p = e_p$ se $p \neq 1, k$ e defina

$$G_1(x) = (\alpha_k(x), x_2, \dots, x_N).$$

Note que G_1 é primitiva, que $G_1(0) = 0$ e que $G'_1(0)$ é inversível em virtude de (3.8).

Pelo Teorema da Função Inversa existe um aberto $U_1 \subset \Omega$ contendo a origem tal que $G_1|_{U_1}$ é um difeomorfismo de classe C^1 de U_1 sobre $G_1(U_1)$. Defina

$$F_1(y) = A_1F \circ G_1^{-1}(y), \quad y \in G_1(U_1).$$

Note que F_1 é de classe C^1 , que $F_1(0) = 0$, que $F'_1(0) \in GL(\mathbb{R}^N)$ pela regra da cadeia e também que

$$(3.9) \quad F(x) = A_1F_1 \circ G_1(x).$$

Além disto é fácil ver que F_1 é da forma

$$F_1(y) = (y_1, \alpha_{1,2}(y), \dots, \alpha_{1,N}(y)).$$

Novamente, como $F'_1(0) \in GL(\mathbb{R}^N)$, concluímos, como antes, que existe $k \in \{2, \dots, N\}$ tal que

$$(3.10) \quad \frac{\partial \alpha_{1,k}}{\partial y_2}(0) \neq 0.$$

Logo o processo pode ser repetido para F_1 substituindo F . Obteremos agora uma decomposição da forma

$$(3.11) \quad F_1(y) = A_2F_2 \circ G_2(y),$$

onde ainda A_2 é uma transformação elementar, G_2 é uma aplicação primitiva com $G_2(0) = 0$, $G'_2(0) \in GL(\mathbb{R}^N)$ e que F_2 é da forma

$$F_2(z) = (z_1, z_2, \alpha_{2,3}(z), \dots, \alpha_{2,N}(z)),$$

para $z = (z_1, \dots, z_n)$ em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^N . Note que (3.9) e (3.11) fornecem

$$F(x) = A_1A_2F_2 \circ G_2 \circ G_1(x).$$

Repetindo o procedimento $N - 2$ vezes mais, atingiremos o estágio em que F_N é aplicação identidade, o que conclui a demonstração da proposição. \square

Conclusão da demonstração de (TMV). Seja $x_0 \in \Omega$. Pelo passo 7, basta mostrar que (TMV) vale em uma vizinhança de x_0 . Considerando o novo difeomorfismo de classe C^1 dado por $x \mapsto f(x+x_0) - f(x_0)$, e levando em conta o passo 5, podemos assumir que $x_0 = 0$ e que $f(0) = 0$. Pela Proposição 3.1, f pode ser escrita, em uma vizinhança da origem, como uma composição de difeomorfismos de classe C^1 em que, para cada um deles, vale (TMV) (passos 4 e 6). Finalmente, pelo passo 1, obtemos nossa conclusão. \square

CAPÍTULO 4

Campos e formas diferenciais

É um simples exercício, usando a regra de L'Hopital, mostrar que a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma(x) = 0$ se $x \leq 0$, $\gamma(x) = \exp\{-1/x\}$ se $x > 0$, é infinitamente diferenciável em \mathbb{R} . Assim sendo a função $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x) = 0$ se $|x| \geq 1$, $\rho(x) = \gamma(1 - |x|^2)$ se $|x| < 1$ é infinitamente diferenciável em \mathbb{R}^N . Para $\epsilon > 0$ definimos, finalmente,

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{a}{\epsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

onde

$$a \doteq \left(\int_{|x| \leq 1} \rho(x) dm(x) \right)^{-1}.$$

Note as seguintes propriedades:

$$\rho_\epsilon(x) > 0 \text{ se } |x| < \epsilon, \quad \rho_\epsilon(x) = 0 \text{ se } |x| \geq \epsilon, \quad \int_{|x| \leq \epsilon} \rho_\epsilon(x) dm(x) = 1.$$

Lema 4.1. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto com $K \subset U$. Então existe uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq g \leq 1$, tal que $g = 1$ em uma vizinhança de K e $g = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus U$.*

Demonstração. Seja $\delta = \text{dist}(K, \mathbb{R}^N \setminus U)/4$ e para $\eta > 0$ defina

$$K_\eta = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, K) \leq \eta\}.$$

Seja, também,

$$g(x) = \int_{K_{2\delta}} \rho_\delta(x - y) dm(y) = \int_{x - K_{2\delta}} \rho_\delta(z) dm(z).$$

A primeira igualdade mostra que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ver exercício 13 do Capítulo 1). É também claro que $0 \leq g \leq 1$. Note, agora, que se $x \in K_\delta$ então $\{z : |z| \leq \delta\} \subset x - K_{2\delta}$ e portanto

$$g(x) = \int_{x - K_{2\delta}} \rho_\delta(z) dm(z) = \int_{|z| \leq \delta} \rho_\delta(z) dm(z) = 1, \quad x \in K_\delta.$$

Por outro lado se $x \notin K_{3\delta}$ e se $y \in K_{2\delta}$ então $|x - y| \geq \delta$ e portanto

$$g(x) = \int_{K_{2\delta}} \rho_\delta(x - y) dm(y) = 0, \quad x \notin K_{3\delta}. \quad \square$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, o espaço $C^\infty(\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis sobre Ω e a valores reais, com as operações de adição e produto ponto a ponto, é um anel comutativo com unidade.

Definição 4.1. Um campo vetorial sobre Ω é uma aplicação \mathbb{R} -linear $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ satisfazendo a regra de Leibniz

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \quad f, g \in C^\infty(\Omega).$$

Denotamos por $\mathfrak{X}(\Omega)$ o conjunto de todos os campos vetoriais sobre Ω . Note que $\mathfrak{X}(\Omega)$ tem a estrutura de um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Mais que isto, se $g \in C^\infty(\Omega)$ e se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ então $gL \in \mathfrak{X}(\Omega)$, onde $(gL)(f) = gL(f)$. Assim $\mathfrak{X}(\Omega)$ tem estrutura de $C^\infty(\Omega)$ -módulo.

Note que se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e se $c \in \mathbb{R}$ então $L(c) = 0$. De fato, basta mostrar que $L(1) = 0$ e isto segue de $L(1) = L(1 \cdot 1) = 2L(1)$.

Exemplo 4.1. As derivadas parciais $\partial/\partial x_j$ são elementos de $\mathfrak{X}(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$.

Exemplo 4.2. Se $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ então

$$[L, M](f) = L(M(f)) - M(L(f)), \quad f \in C^\infty(\Omega),$$

define um elemento $[L, M] \in \mathfrak{X}(\Omega)$ denominado *colchete de Lie* ou *comutador* entre L e M . Para mostrar que $[L, M]$ define um campo vetorial basta verificar a regra de Leibniz. Se $f, g \in C^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} [L, M](fg) &= L(M(fg) - M(L(fg))) \\ &= L(fM(g) + gM(f)) - M(fL(g) + gL(f)) \\ &= L(f)M(g) + fL(M(g)) + L(g)M(f) + gL(M(f)) \\ &\quad - M(f)L(g) - fM(L(g)) - M(g)L(f) - gM(L(f)) \\ &= f[L, M](g) + g[L, M](f). \end{aligned}$$

Lema 4.2. Sejam $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e assumamos que $f = 0$ em um aberto $U \subset \Omega$. Então $L(f) = 0$ em U .

Demonstração. Seja $B \subset\subset U$ uma bola fechada e tomemos $g \in C^\infty(\Omega)$ com $g = 1$ em B , $g = 0$ em $\Omega \setminus U$. Note que $gf = 0$. Temos então $0 = L(fg) = fL(g) + gL(f)$ e portanto $gL(f) = 0$ em U . Como $g = 1$ em B segue que $L(f) = 0$ em B . Como B é arbitrária segue que $L(f) = 0$ em U . \square

Com o auxílio deste lema podemos demonstrar um resultado fundamental:

Teorema 4.1. Todo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ se escreve, de modo único, na forma

$$(4.1) \quad L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \partial/\partial x_j, \quad a_j \in C^\infty(\Omega), \quad j = 1, \dots, N.$$

Assim $\mathfrak{X}(\Omega)$ é um $C^\infty(\Omega)$ -módulo livre de dimensão N e com base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_N\}$.

Demonstração. Vamos mostrar que (4.1) vale com a escolha $a_j = L(x_j)$, $j = 1, \dots, N$, ou seja, fixado $x_0 \in \Omega$ arbitrário mostraremos que

$$(4.2) \quad L(f)(x_0) = \sum_{j=1}^N a_j(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Tomemos uma bola aberta $B \subset \subset \Omega$ centrada em x_0 e $f \in C^\infty(\Omega)$. Para $x \in B$ formemos

$$\lambda(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).$$

Como

$$\lambda(1) - \lambda(0) = \int_0^1 \lambda'(t) dt$$

a regra da cadeia fornece

$$(4.3) \quad f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^N h_j(x) (x_j - x_{0j}),$$

onde $h_j \in C^\infty(B)$ são dadas por

$$h_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + t(x - x_0)) dt.$$

Tomamos, a seguir, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se anulando no complementar de um subconjunto compacto de B e com $\psi = 1$ em uma vizinhança aberta U de x_0 . Pelo Lema 4.2, $L(f)(x) = L(\psi f)(x)$ para $x \in U$. Uma vez que as funções ψh_j podem ser consideradas como elementos de $C^\infty(\Omega)$, de (4.3) segue que, para $x \in U$,

$$\begin{aligned} L(f)(x) &= L(\psi f)(x) \\ &= L(\psi f(x_0))(x) + \sum_{j=1}^N L(\psi h_j)(x)(x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^N (\psi h_j)(x)L(x_j - x_{j0})(x) \\ &= f(x_0) \underbrace{L(\psi)(x)}_{=0} + \sum_{j=1}^N L(\psi h_j)(x)(x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^N a_j(x)(\psi h_j)(x). \end{aligned}$$

Fazendo $x = x_0$, e observando $\psi(x_0) = 1$ e que $h_j(x_0) = (\partial f / \partial x_j)(x_0)$, obtemos (4.2). \square

Formas diferenciais

Para cada $k = 0, 1, \dots$ vamos definir, nesta seção, o espaço das formas diferenciais de grau k (infinitamente diferenciáveis) sobre Ω ou, mais simplesmente k -formas sobre Ω . Tais espaços serão denotados por $F_k(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots$

Definição 4.2. (a) Uma 0-forma sobre Ω é uma função infinitamente diferenciável sobre Ω e a valores reais. Assim $F_0(\Omega) = C^\infty(\Omega)$;

(b) Uma 1-forma sobre Ω é uma aplicação $\omega : X(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \omega(L_1 + L_2) &= \omega(L_1) + \omega(L_2), \quad L_1, L_2 \in X(\Omega); \\ \omega(fL) &= f\omega(L), \quad L \in X(\Omega), f \in C^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Assim o espaço $F_1(\Omega)$ das 1-formas sobre Ω nada mais é que o dual do $C^\infty(\Omega)$ -módulo $X(\Omega)$. Em particular $F_1(\Omega)$ tem estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} e também de $C^\infty(\Omega)$ -módulo, onde o produto de um elemento $\omega \in F_1(\Omega)$ por um elemento $f \in C^\infty(\Omega)$ é dado pela relação

$$(f\omega)(L) = f \omega(L), \quad L \in X(\Omega).$$

Definição 4.3. Se $f \in C^\infty(\Omega)$ definimos o diferencial de f como sendo a 1-forma df sobre Ω definida por

$$df(L) = L(f), \quad L \in X(\Omega).$$

Exemplo 4.3. Para cada $j = 1, \dots, N$ temos

$$dx_j(L) = L(x_j), \quad L \in X(\Omega).$$

Em particular

$$(4.4) \quad dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Podemos agora obter a representação de qualquer 1-forma sobre Ω .

Teorema 4.2. Toda $\omega \in F_1(\Omega)$ se escreve na forma

$$(4.5) \quad \omega = \sum_{k=1}^N b_k(x) dx_k,$$

onde $b_k = \omega(\partial/\partial x_k)$. Assim, $\{dx_1, \dots, dx_N\}$ é dual da base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_N\}$.

Demonstração. Seja $L \in X(\Omega)$ dado na forma (4.1). Então

$$\begin{aligned} \omega(L) &= \omega \left(\sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N a_j b_j \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j b_k dx_k \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N b_k dx_k \right) \left(\sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N b_k dx_k \right) (L). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.1. Se $f \in C^\infty(\Omega)$ então

$$(4.6) \quad df = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Demonstração. (4.6) segue de (4.5) e do fato que

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad \square$$

Definição 4.4. Uma k -forma sobre Ω (isto é, um elemento de $F_k(\Omega)$) é uma aplicação

$$\omega : \underbrace{X(\Omega) \times \dots \times X(\Omega)}_{k \text{ fatores}} \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) ω é $C^\infty(\Omega)$ -multilinear, isto é, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, e fixados $L_1, \dots, L_{j-1}, L_{j+1}, \dots, L_N \in X(\Omega)$, a aplicação

$$L \mapsto \omega(L_1, \dots, L_{j-1}, L, L_{j+1}, \dots, L_N)$$

define uma 1-forma sobre Ω .

(b) ω é alternada, isto é, se $L_1, \dots, L_N \in X(\Omega)$ e se $1 \leq i < j \leq N$ então

$$\omega(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_N) = -\omega(L_1, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_N).$$

Note que, também, os espaços $F_k(\Omega)$ têm a estrutura de $C^\infty(\Omega)$ -módulo.

Em virtude de (a) uma k -forma ω fica determinada pelas funções

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \in C^\infty(\Omega), \quad j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, N\}.$$

Além disto, levando em conta agora também a propriedade (b), segue que a k -forma ω fica determinada pelas funções

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \in C^\infty(\Omega), \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N.$$

Em particular segue que $F_k(\Omega) = 0$ se $k > N$.

Para simplificar um pouco a notação é interessante recorrer a uma nomenclatura conveniente: por um *multi-índice ordenado de comprimento k* entendemos uma sequência finita da forma $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, com $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N$. Escreveremos também $|J| = k$.

Se ω é uma k -forma sobre Ω , e se J é um multi-índice ordenado com $|J| = k$, vamos escrever

$$(4.7) \quad \omega_J \doteq \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \in C^\infty(\Omega), \quad J = \{j_1, \dots, j_k\}.$$

Se também definirmos, para cada multi-índice ordenado J com $|J| = k$, a k -forma dx_J pela regra

$$(4.8) \quad dx_J \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) = \delta_{IJ}, \quad I = \{i_1, \dots, i_k\} \text{ multi-índice ordenado,}$$

então vemos que toda k -forma ω pode ser representada na forma

$$(4.9) \quad \omega = \sum'_{|J|=k} \omega_J dx_J,$$

onde a notação \sum' indica que a soma se dá somente sobre os multi-índices ordenados de comprimento k . A representação (4.9) denomina-se *representação canônica da k -forma* ω e permite que interpretemos, de um modo mais informal, os espaços $F_k(\Omega)$ como o conjunto de todas as somas do tipo (4.9) munido das seguintes operações: se $\omega, \theta \in F_k(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$,

$$\omega = \sum'_{|J|=k} \omega_J dx_J, \quad \theta = \sum'_{|J|=k} \theta_J dx_J,$$

então

$$\omega + \theta = \sum'_{|J|=k} (\omega_J + \theta_J) dx_J, \quad f\omega = \sum'_{|J|=k} (f\omega_J) dx_J.$$

Em particular vemos que $F_k(\Omega)$ é um $C^\infty(\Omega)$ -módulo livre com

$$\dim F_k(\Omega) = \binom{N}{k},$$

uma vez que este é o número de multi-índices ordenados de comprimento k formado por elementos de $\{1, \dots, N\}$.

Produto exterior

Nesta seção vamos introduzir uma operação $C^\infty(\Omega)$ -bilinear

$$F_p(\Omega) \times F_q(\Omega) \longrightarrow F_{p+q}(\Omega), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

denominada de *produto exterior* entre as formas α e β . Para tal faremos uso da representação canônica introduzida acima, e portanto será suficiente definir $dx_I \wedge dx_J$, onde I (resp. J) é um multi-índice ordenado de comprimento p (resp. q). Assim, se $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{j_1, \dots, j_q\}$, com $i_1 < \dots < i_p$, $j_1 < \dots < j_q$, poremos

$$(4.10) \quad dx_I \wedge dx_J = \begin{cases} (-1)^\eta dx_{[I,J]} & \text{se } I \cap J = \emptyset; \\ 0 & \text{se } I \cap J \neq \emptyset. \end{cases}$$

onde $[I, J]$ é o multi-índice ordenado de comprimento $p + q$ formado pelos elementos da reunião $I \cup J$ e η é o número de diferenças $j_r - i_s$ que são < 0 .

Se tomarmos então $\alpha \in F_p(\Omega)$, $\beta \in F_q(\Omega)$, com representações canônicas

$$\alpha = \sum'_{|I|=p} \alpha_I dx_I, \quad \beta = \sum'_{|J|=q} \beta_J dx_J,$$

definimos

$$\alpha \wedge \beta \doteq \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q} (\alpha_I \beta_J) dx_I \wedge dx_J.$$

Note que, em particular, se $f \in C^\infty(\Omega) = F_0(\Omega)$ e se $\omega \in F_p(\Omega)$ então

$$f \wedge \omega = f\omega.$$

Proposição 4.1. Se $\omega_1, \omega_2, \alpha \in F_p(\Omega)$, $\beta \in F_q(\Omega)$, $\gamma \in F_r(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ então

- (P1) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \beta = \omega_1 \wedge \beta + \omega_2 \wedge \beta;$
 (P2) $(f\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (f\beta) = f(\alpha \wedge \beta);$
 (P3) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha;$
 (P4) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$

Demonstração. As propriedades (P1) e (P2) são de fácil verificação. Para (P3) e (P4) basta verificar que se I, J e K são multi-índices ordenados de comprimento p, q e r respectivamente então

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^{pq} dx_J \wedge dx_I, \quad (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K),$$

(cf. Exercício 3 do Capítulo 4). □

Lema 4.3. Se $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ é um multi-índice ordenado de comprimento k , $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N$, então

$$(4.11) \quad dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Demonstração. Usamos indução sobre k . Para $k = 1$ o resultado é óbvio. Suponhamos então que (4.11) seja válida para multi-índices ordenados de comprimento $k - 1$. Dado então J de comprimento k como no enunciado escrevemos $J = J' \cup \{j_k\}$, onde J' é então um multi-índice ordenado de comprimento $k - 1$. Usando a associatividade do produto exterior e a hipótese de indução segue então que

$$\begin{aligned} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} &= (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}) \wedge dx_{j_k} \\ &= dx_{J'} \wedge dx_{j_k} \\ &= dx_J, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (4.10), notando que $\eta = 0$ neste caso. □

Exemplo 4.4. Toda $\omega \in F_N(\Omega)$ se escreve na forma

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N, \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Em certos cálculos o seguinte resultado será útil. Nele usaremos a seguinte notação: se $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ poremos

$$\epsilon[i_1, \dots, i_k] = \prod_{p < q} \text{sgn}(i_q - i_p),$$

onde

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

denota a chamada *função sinal*.

Lema 4.4. *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_N \in F_1(\Omega)$. Se $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ então*

$$\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k} = \epsilon[i_1, \dots, i_k] \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_k},$$

onde $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$ e $j_1 \leq \dots \leq j_k$.

Demonstração. Podemos assumir que os índices i_1, \dots, i_k são todos distintos. A demonstração se dará, novamente, por indução sobre k . O caso $k = 1$ é trivial e portanto assumimos que o lema seja válido para $k - 1$. Notando primeiramente que

$$\epsilon[i_1, \dots, i_k] = \pm \epsilon[i_1, \dots, i_{k-1}],$$

onde o sinal $+$ (resp. $-$) ocorre se o número de índices i_j , $1 \leq j \leq k - 1$, que são maiores que i_k é par (resp. ímpar) a hipótese de indução fornece

$$\begin{aligned} \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k} &= (\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{k-1}}) \wedge \theta_{i_k} \\ &= \epsilon[i_1, \dots, i_{k-1}] (\theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{k-1}}) \wedge \theta_{i_k}, \end{aligned}$$

onde $\{i_1, \dots, i_{k-1}\} = \{j_1, \dots, j_{k-1}\}$ e $j_1 < \dots < j_{k-1}$. Destas considerações o resultado segue imediatamente. \square

Lema 4.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $F_1, \dots, F_N \in C^\infty(\Omega)$. Então*

$$(4.12) \quad dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N = \frac{\partial(F_1, \dots, F_N)}{\partial(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N.$$

Demonstração. Temos¹

$$\begin{aligned} dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N} \frac{\partial F_1}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{j_2}} \dots \frac{\partial F_N}{\partial x_{j_N}} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_N} \\ &= \left(\sum_{j_1, j_2, \dots, j_N} \epsilon[j_1, \dots, j_N] \frac{\partial F_1}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{j_2}} \dots \frac{\partial F_N}{\partial x_{j_N}} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N \\ &= \frac{\partial(F_1, \dots, F_N)}{\partial(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N. \end{aligned} \quad \square$$

A derivada exterior

Lembremos a definição da aplicação \mathbb{R} -linear

$$d : F_0(\Omega) \rightarrow F_1(\Omega), \quad f \mapsto df.$$

Note ainda que a regra de Leibniz fornece

$$(4.13) \quad d(fg) = fdg + gdf = f \wedge dg + df \wedge g.$$

¹Recorde que se $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ é uma matriz quadrada $N \times N$ então

$$\det A = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \epsilon[i_1, \dots, i_N] a_{1, i_1} a_{2, i_2} \dots a_{N, i_N}.$$

Nosso objetivo agora é estender esta definição para formas de grau arbitrário. Se $\omega \in F_k(\Omega)$ tem representação canônica

$$\omega = \sum'_{|J|=k} \omega_J dx_J$$

definimos

$$(4.14) \quad d\omega = \sum'_{|J|=k} (d\omega_J) \wedge dx_J = \sum'_{|J|=k} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Note então que, para cada $k = 0, 1, \dots, N-1$, d define um operador \mathbb{R} -linear

$$d : F_k(\Omega) \longrightarrow F_{k+1}(\Omega).$$

Exemplo 4.5. Tomemos $\omega \in F_1(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Escrevendo

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3$$

temos

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3.$$

Proposição 4.2. Sejam $\alpha \in F_p(\Omega)$, $\beta \in F_q(\Omega)$. Então

$$(P5) \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta;$$

$$(P6) \quad d(d\alpha) = 0.$$

Demonstração. Para (P5) podemos assumir que $\alpha = f dx_I$, $\beta = g dx_J$ onde $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ são multi-índice ordenados e disjuntos de comprimento p e q respectivamente. Temos

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^\eta (fg) dx_{[I,J]},$$

onde η é o número de diferenças $j_r - i_s$ que são negativas, e portanto

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= (-1)^\eta g df \wedge dx_{[I,J]} + (-1)^\eta f dg \wedge dx_{[I,J]} \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + f (dg \wedge dx_I) \wedge dx_J \\ &\stackrel{\star}{=} (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^p f (dx_I \wedge dg) \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^p (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \end{aligned}$$

onde na igualdade (\star) usamos a propriedade (P3).

Para demonstramos (P6) primeiramente observamos que se $f \in C^\infty(\Omega)$ então

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \\ &= \left\{ \sum_{j < k} + \sum_{j > k} \right\} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

uma vez que $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_k = \partial^2 f / \partial x_k \partial x_j$ e $dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j$ quaisquer que sejam j e k .

Agora, se $\alpha = f dx_I$, onde I é um multi-índice ordenado de comprimento p , então $d\alpha = df \wedge dx_I$ e portanto, por (P5),

$$d(d\alpha) = [d(df)] \wedge dx_I + (-1)^0 f \wedge d(dx_I) = 0$$

pois $d(dx_I) = d(1dx_I) = d1 \wedge dx_I = 0$.

A demonstração da Proposição 4.2 está completa. \square

Encerramos este parágrafo com uma importante definição.

Definição 4.5. Uma k -forma $\omega \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ é fechada se $d\omega = 0$. Dizemos também que $\omega \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ é exata se $k \geq 1$ e se existir $\alpha \in \mathbf{F}_{k-1}(\Omega)$ tal que $d\alpha = \omega$.

Note que (P6) implica que toda forma exata é fechada. A recíproca, em geral, não é verdadeira e o estudo desta propriedade será um dos objetivos do Capítulo 5 e do Apêndice.

Pullback

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $U \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos abertos e seja também $F : \Omega \rightarrow U$ uma aplicação de classe C^∞ . Vamos escrever $y = F(x) \in U$, onde $F(x) = (F_1(x), \dots, F_M(x))$, $x \in \Omega$.

A aplicação “pullback” estende, para formas diferenciais de grau arbitrário, a aplicação \mathbb{R} -linear de composição

$$C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(\Omega), \quad g \mapsto g_F \doteq g \circ F.$$

Seja então $\omega \in \mathbf{F}_p(U)$ com expressão canônica

$$\omega = \sum'_{|I|=p} \omega_I dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}.$$

Definimos o “pullback” de ω pela aplicação F como sendo o elemento de $\mathbf{F}_p(\Omega)$ dado por

$$(4.15) \quad \omega_F \doteq \sum'_{|I|=p} (\omega_I \circ F) dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_p}$$

Note que

$$\mathbf{F}_p(U) \ni \omega \mapsto (\omega)_F \in \mathbf{F}_p(\Omega)$$

é uma aplicação \mathbb{R} -linear.

Lema 4.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $U \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos abertos e $F : \Omega \rightarrow U$ de classe C^∞ . Se $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$ então

$$(4.16) \quad (dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k})_F = dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}.$$

Demonstração. Segue da definição de “pullback” em conjunto com o Lema 4.4. \square

A próxima proposição fornece as propriedades fundamentais do “pullback”:

Proposição 4.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $U \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos abertos e $F : \Omega \rightarrow U$ uma aplicação de classe C^∞ . Sejam, também, $\alpha \in \mathbf{F}_p(U)$, $\beta \in \mathbf{F}_q(U)$. Então*

$$(P7) \quad (\alpha \wedge \beta)_F = \alpha_F \wedge \beta_F;$$

$$(P8) \quad d(\alpha_F) = (d\alpha)_F.$$

Demonstração. Para (P7) podemos assumir que $\alpha = dy_I$, $\beta = dy_J$ onde I e J são multi-índices de comprimento p e q respectivamente. Escrevendo $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ temos, por (4.16),

$$\begin{aligned} (dy_I \wedge dy_J)_F &= (dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q})_F \\ &= dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_p} \wedge dF_{j_1} \wedge \dots \wedge dF_{j_q} \\ &= (dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_p}) \wedge (dF_{j_1} \wedge \dots \wedge dF_{j_p}) \\ &= (dy_I)_F \wedge (dy_J)_F. \end{aligned}$$

Passamos agora à demonstração de (P8). Suponhamos, primeiramente, que $\alpha \in \mathbf{F}_0(U)$, isto é, que $\alpha = g \in C^\infty(U)$. Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} d[g_F] &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial(g \circ F)}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial g}{\partial y_k} \right)_F \frac{\partial F_k}{\partial x_j} dx_k \\ &= \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial g}{\partial y_k} \right)_F dF_k \\ &= (dg)_F. \end{aligned}$$

Para demonstrar (P8) no caso geral podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\alpha = g dy_I$, onde $g \in C^\infty(U)$ e $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ é um multi-índice ordenado de comprimento p . Uma vez que

$$d[(dy_I)_F] = d[dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_p}] = 0$$

obtemos, por (P5),

$$\begin{aligned} d\alpha_F &= d[g_F (dy_I)_F] \\ &= d(g_F) \wedge (dy_I)_F \\ &= (dg)_F \wedge (dy_I)_F \\ &\stackrel{*}{=} (dg \wedge dy_I)_F \\ &= (d\alpha)_F, \end{aligned}$$

onde, na igualdade (*), usamos (P7). □

Veremos agora como a operação de “pullback” se comporta com relação a composições. Fixaremos então uma aplicação F como antes e tomaremos $G : U \rightarrow V$ de classe C^∞ ,

onde agora V é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^Q . Escreveremos $z = G(y)$, $y \in U$, e $G = (G_1, \dots, G_Q)$.

Proposição 4.4. *Se $\omega \in \mathbb{F}_k(V)$ então*

$$(P9) \quad (\omega_G)_F = (\omega)_{G \circ F}.$$

Demonstração. Escrevendo

$$\alpha = \sum'_{|I|=k} \alpha_I dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$$

temos, por (P7),

$$(\alpha_G)_F = \sum'_{|I|=k} ((\alpha_I)_G)_F ((dz_{i_1})_G)_F \wedge \dots \wedge ((dz_{i_k})_G)_F$$

e

$$(\alpha)_{G \circ F} = \sum'_{|I|=k} (\alpha_I)_{G \circ F} (dz_{i_1})_{G \circ F} \wedge \dots \wedge (dz_{i_k})_{G \circ F}.$$

Uma vez que $((\alpha_I)_G)_F = (\alpha_I \circ G) \circ F = \alpha_I \circ (G \circ F) = (\alpha_I)_{G \circ F}$, vemos imediatamente que (P9) ficará demonstrada se verificarmos sua validade para $\alpha = df$, com $f \in C^\infty(V)$. Mas, por (P8),

$$(df)_{G \circ F} = d(f \circ (G \circ F)) = d((f \circ G) \circ F) = [d(f \circ G)]_F = [(df)_G]_F.$$

□

Corolário 4.2. *Se $F : \Omega \rightarrow U$ é um difeomorfismo entre subconjuntos abertos Ω e U de \mathbb{R}^N então a aplicação “pullback” $\omega \mapsto \omega_F$ induz isomorfismos de \mathbb{R} -espaços vetoriais entre $\mathbb{F}_k(U)$ e $\mathbb{F}_k(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, N$.*

Concluiremos este capítulo apresentando uma demonstração do importante *Lema de Poincaré*. Sua demonstração evidenciará uma das muitas importantes aplicações do operador de “pullback”.

Antes, porém, uma definição: um subconjunto D de \mathbb{R}^N é *estrelado* se existir $x_0 \in D$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $x \in D$ e se $t \in [0, 1]$ então $x_0 + t(x - x_0) \in D$. Todo conjunto convexo é estrelado; na realidade é fácil ver que D é estrelado se, e só se, D se escreve como a reunião de uma família de conjuntos convexos com intersecção não vazia.

Teorema (Lema de Poincaré). *Se Ω é um subconjunto aberto e estrelado de \mathbb{R}^N e se $k \geq 1$ então toda k -forma fechada em Ω é exata.*

Demonstração. Seja $\omega \in \mathbb{F}_k(\Omega)$, com representação canônica

$$\omega = \sum'_{|I|=k} \omega_I dx_I,$$

e suponhamos que $d\omega = 0$. Precisamos mostrar a existência de $\alpha \in \mathbb{F}_{k-1}(\Omega)$ tal que $d\alpha = \omega$. Procederemos do seguinte modo: fixemos $x_0 \in \Omega$ tal que $x_0 + t(x - x_0) \in \Omega$ para todo para $(t, x) \in [0, 1] \times \Omega$ e definamos $F : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$ pela regra

$$F(t, x) = x_0 + t(x - x_0).$$

Podemos escrever

$$(\omega)_F = \sum'_{|I|=k} \beta_I(t, x) dx_I + \sum'_{|J|=k-1} \gamma_J(t, x) dt \wedge dx_J.$$

Afirmamos que

$$\alpha = \sum'_{|J|=k-1} \left\{ \int_0^1 \gamma_J(t, x) dt \right\} dx_J$$

satisfaz a propriedade desejada.

De fato, observando que $d[(\omega)_F] = (d\omega)_F = 0$ obtemos

$$0 = \sum'_{|I|=k} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \beta_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I + dt \wedge \left\{ -\sum'_{|J|=k-1} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \gamma_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J + \sum'_{|I|=k} \frac{\partial \beta_I}{\partial t} dx_I \right\}.$$

Como o termo entre chaves deve ser identicamente zero, integrando os coeficientes para $t \in [0, 1]$ obtemos

$$d\alpha = \sum'_{|I|=k} (\beta_I(1, x) - \beta_I(0, x)) dx_I.$$

Para concluir a demonstração basta verificar que $\omega_J(x) = \beta_J(1, x) - \beta_J(0, x)$. Para tal observemos primeiramente que a transformação F se escreve como $F = (F_1, \dots, F_N)$, onde $F_j(t, x) = x_{0j} + t(x_j - x_{0j})$, (aqui $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0N})$). Como se vê facilmente que

$$dF_j = (x_j - x_{0j})dt + tdx_j \quad j = 1, \dots, N,$$

obtemos

$$\beta_J(x, t) = t^k \omega_J(x_0 + t(x - x_0)),$$

e nossa afirmação segue.

A demonstração está completa. □

Uma observação sobre a invariância

Apesar de termos introduzido a noção de forma diferencial de modo intrínseco [cf. definições 4.2 e 4.4] não adotamos a mesma estratégia quando das definições do produto exterior e da derivada exterior. Tais operações foram definidas sobre as representações “standard” das formas envolvidas, e portanto dependentes das coordenadas (x_1, \dots, x_N) pré-fixadas. Entretanto, a proposição 4.3 mostra que as operações de produto e derivada exterior são invariantes por difeomorfismos e portanto tem, também, significado intrínseco.

Apêndice - Módulos sobre anéis comutativos

Seja R um anel comutativo com unidade. Exemplos importantes são \mathbb{Z} (o anel dos inteiros), \mathbb{R} , $\mathbb{R}[X]$ (anel dos polinômios com coeficientes reais) e $C^\infty(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N . Por um R -módulo entendemos um grupo abeliano $(M, +)$ em conjunto com uma aplicação

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (r, x) \mapsto r \cdot x$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1.) $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- (2.) $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- (3.) $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- (4.) $1 \cdot x = x$

para $x, y \in M$, $r, s, 1 \in R$.

Aqui estão alguns exemplos:

(a) Todo grupo abeliano $(G, +)$ é naturalmente um \mathbb{Z} -módulo, com operações definidas por

$$m \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_m \text{ se } m > 0, \quad m \cdot x = -[(-m) \cdot x] \text{ se } m < 0.$$

(b) Todo espaço vetorial sobre \mathbb{R} é um \mathbb{R} -módulo.

(c) $X(\Omega)$ é um $C^\infty(\Omega)$ -módulo.

(d) Se R é um anel comutativo então $R^n \doteq R \times \dots \times R$ (n fatores) tem uma estrutura natural de R -módulo, onde as operações são assim definidas: se $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ e se $r \in R$ então

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ r \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (rx_1, \dots, rx_n). \end{aligned}$$

(e) Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e fixemos $T \in L(V)$. Então T define sobre $(V, +)$ uma estrutura de $\mathbb{R}[X]$ -módulo pela regra

$$p(X) \cdot v = p(T)v, \quad p \in \mathbb{R}[X], \quad v \in V.$$

Sejam M e N R -módulos. Denotaremos por $\text{Hom}_R(M, N)$ o conjunto dos homomorfismos de R -módulos de M em N , isto é, o conjunto de todas as aplicações $f : M \rightarrow N$ que satisfazem

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \quad x, y \in M; \\ f(r \cdot x) &= r \cdot f(x), \quad x \in M, \quad r \in R. \end{aligned}$$

Note que, com as operações naturais, $\text{Hom}_R(M, N)$ tem estrutura de R -módulo.

Definição 4.6. Dizemos que os R -módulos M e N são isomorfos se existe $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ bijetora.

Definição 4.7. Seja A um subconjunto de um R -módulo M . Dizemos que A é uma base para M se cada $x \in M$ se escreve de modo único na forma

$$x = r_{i_1}x_{i_1} + \dots + r_{i_n}x_{i_n},$$

onde $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in A$, $r_{i_1}, \dots, r_{i_n} \in R$. Um R -módulo M é livre se M tem uma base.

Se um R -módulo M é livre e com base finita então M é isomorfo a R^n para algum $n \geq 0$. O valor de n é unicamente determinado e é denominado *dimensão* do R -módulo M .

Exemplo 4.6. Diferentemente do que ocorre no caso de espaços vetoriais, nem todo R -módulo é livre. Por exemplo, qualquer grupo abeliano finito é um \mathbb{Z} -módulo que não é livre. Exemplo de um tal grupo é \mathbb{Z}_m , o grupo dos inteiros módulo m . Note que o conjunto $\{1\}$ gera o \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}_m (no sentido que todo elemento de \mathbb{Z}_m é um múltiplo de 1), mas que $k \cdot 1 = 0$ se $k \in \mathbb{Z}$ é um múltiplo de m (e portanto $\{1\}$ não é base de \mathbb{Z}_m).

Finalmente observamos o seguinte fato, cuja demonstração é análoga à do caso envolvendo espaços vetoriais. Seja M um R -módulo livre e de dimensão n . Então o mesmo é verdade para $\text{Hom}_R(M, R)$. Mais precisamente, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de M e se definirmos $e_j^* \in \text{Hom}_R(M, R)$ pela regra $e_j^*(e_k) = \delta_{jk}$ então $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ é uma base de $\text{Hom}_R(M, R)$, denominada a *base dual* de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

CAPÍTULO 5

Integração de formas diferenciais e o Teorema de Stokes

Neste capítulo apresentaremos a teoria de integração de formas diferenciais e demonstraremos o teorema de Stokes.

Inicialmente definimos a integral de uma N -forma. Para tal sejam então $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\omega \in \mathbf{F}_N(\Omega)$. Se $E \subset\subset \Omega$ é Lebesgue-mensurável definimos

$$\int_E \omega \doteq \int_E f(x) \, dm(x),$$

onde $f \in C^\infty(\Omega)$ é tal que $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$.

Esta definição é invariante por difeomorfismos "positivos", no seguinte sentido:

Proposição 5.1. *Sejam Ω e Ω' abertos de \mathbb{R}^N e $G : \Omega \rightarrow \Omega'$ um difeomorfismo de classe C^∞ . Escreva $y = G(x)$ e suponha que $\det G'(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Então se $\omega \in \mathbf{F}_N(\Omega')$ e se $E \subset\subset \Omega'$ é Lebesgue-mensurável vale*

$$\int_E \omega = \int_{G^{-1}(E)} \omega_G.$$

Demonstração. Se $\omega = f(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N$ temos, pelo Lema 4.5,

$$\omega_G = f(G(x)) \det G'(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$$

e portanto

$$\int_{G^{-1}(E)} \omega_G = \int_{G^{-1}(E)} f(G(x)) \det G'(x) \, dm(x) = \int_E f(y) \, dm(y)$$

em virtude do teorema de mudança de variáveis, já que $\det G'(x) = |\det G'(x)|$ para todo $x \in \Omega$. □

Para estender este conceito a formas de grau arbitrário necessitamos introduzir alguns novos conceitos.

Se $k \geq 1$ definimos o k -simplexo "standard" como sendo o conjunto

$$Q^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq 0, \dots, x_k \geq 0, x_1 + \dots + x_k \leq 1\}.$$

É conveniente estender esta definição ao caso $k = 0$ colocando $Q^0 = \{0\}$.

Definição 5.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N . Uma k -superfície em Ω ($k \geq 1$) é uma aplicação $\Phi : B^k \rightarrow \Omega$ de classe C^∞ , onde B^k é ou o k -simplexo "standard" Q^k ou um intervalo compacto em \mathbb{R}^k de volume > 0 .*

Aqui também é interessante estender este conceito ao caso $k = 0$: uma 0-superfície é uma aplicação $\Phi : \{0\} \rightarrow \Omega$; assim, 0-superfícies se identificam com pontos de Ω .

A Definição 5.1 requer um comentário importante: dizer que a aplicação Φ é de classe C^∞ significa na realidade dizer que Φ está definida e é de classe C^∞ em um aberto de \mathbb{R}^k que contém B^k .

Definição 5.2. *Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N , $k \geq 1$ e $\omega \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ uma k -forma sobre Ω . Se $\Phi : B^k \rightarrow \Omega$ é uma k -superfície em Ω então a integral de ω sobre Φ é definida por*

$$(5.1) \quad \int_{\Phi} \omega \doteq \int_{B^k} (\omega)_{\Phi}.$$

Note que o “pullback” de ω por Φ é uma k -forma em um aberto de \mathbb{R}^k que contém B^k e portanto o lado direito de (5.1) está bem definido.

Novamente é importante estender este conceito ao caso $k = 0$. Se $f \in \mathbf{F}_0(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ e se $\Phi : \{0\} \rightarrow \Omega$ é uma 0-superfície colocamos

$$\int_{\Phi} f \doteq f(\Phi(0)).$$

Vamos agora calcular $\int_{\Phi} \omega$ explicitamente. Para tal escrevamos ω na forma

$$\omega = \sum'_{|I|=k} \omega_I dx_I = \sum'_{|I|=k} \omega_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Se $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \dots, \Phi_N(t))$, com $t = (t_1, \dots, t_k)$, então, pelo Lema 4.6 do Capítulo 4,

$$\begin{aligned} (\omega)_{\Phi} &= \sum'_{|I|=k} \omega_I(\Phi(t)) d\Phi_{i_1}(t) \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}(t) \\ &= \sum'_{|I|=k} \omega_I(\Phi(t)) \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k \end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{B^k} \left\{ \sum'_{|I|=k} \omega_I(\Phi(t)) \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \right\} dm(t).$$

Note que neste caso a integral de Lebesgue pode ser substituída pela integral de Riemann, o que faremos a partir de agora.

Daremos agora alguns exemplos.

Exemplo 5.1. Suponha $k = 1$, seja $\omega \in \mathbf{F}_1(\Omega)$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma 1-superfície em Ω (também chamada de “curva parametrizada” em Ω). Se

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j(x) dx_j$$

e se $\gamma = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ então

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^N \omega_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) \right\} dt.$$

Note que se, em particular, $\omega = df$, com $f \in C^\infty(\Omega)$, então

$$(5.2) \quad \int_{\gamma} df = \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial t_j}(\gamma(t)) \gamma_j'(t) \right\} dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

De (5.2) obtemos uma simples condição necessária para que uma 1-forma seja exata:

- se Ω é um aberto de \mathbb{R}^N e se ω é uma 1-forma exata sobre Ω , então $\int_{\gamma} \omega = 0$ para toda curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Mais a frente mostraremos que este critério pode ser apropriadamente estendido para formas de grau arbitrário. Aproveitaremos o momento para aplicá-lo para exibir uma 1-forma em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que é fechada mas não é exata. De fato, seja $\alpha \in F_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ definida por

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Um cálculo direto mostra que $d\alpha = 0$. Por outro lado, se $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ então

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \right\} dt = 2\pi,$$

o que mostra que não existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ satisfazendo $df = \alpha$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exemplo 5.2. Sejam $B^3 = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ e

$$\Phi : B^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$

Então um cálculo direto mostra que

$$\int_{\Phi} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = -4\pi/3.$$

Sejam agora Ω (resp. U) um aberto de \mathbb{R}^N (resp. \mathbb{R}^M) e seja também $F : \Omega \rightarrow U$ uma aplicação de classe C^∞ . Se $\Phi : B^k \rightarrow \Omega$ é uma k -superfície em Ω então $F \circ \Phi : B^k \rightarrow U$ é uma k -superfície em U . Nestas condições temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2. Se $\omega \in F_k(U)$ então

$$(5.3) \quad \int_{F \circ \Phi} \omega = \int_{\Phi} (\omega)_F.$$

Demonstração. Uma vez que $(\omega)_{F \circ \Phi} = ((\omega)_F)_\Phi$ (Proposição 4.4 do Capítulo 4) vemos que ambos os lados de (5.3) são iguais a $\int_{B^k} (\omega)_{F \circ \Phi}$. \square

Simplexos e cadeias afins

Dados p_0, p_1, \dots, p_k em \mathbb{R}^N o k -simplexo (*orientado*) *afim* definido por p_0, p_1, \dots, p_k é a k -superfície

$$\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$$

definida por

$$(5.4) \quad \sigma(t_1, \dots, t_k) = p_0 + \sum_{j=1}^k t_j(p_j - p_0), \quad t = (t_1, \dots, t_k) \in Q^k.$$

Note que σ pode ser expressa como

$$(5.5) \quad \sigma(t) = p_0 + At, \quad t \in Q^k,$$

onde $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ é dada por $Ae_j = p_j - p_0$, $j = 1, \dots, k$ (aqui, como usual, $\{e_1, \dots, e_k\}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^k).

Em particular um 1-simplexo afim $\sigma = [p_0, p_1]$ nada mais é que o segmento *orientado* ligando p_0 a p_1 .

É fácil ver que se $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$ então $\sigma(Q^k)$ é igual à envoltória convexa do conjunto $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$.

Dado um aberto Ω de \mathbb{R}^N denotaremos por $\mathfrak{s}_k(\Omega)$ o conjunto de todos os k -simplexos afins $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$ tais que $\sigma(Q^k) \subset \Omega$. Note que se $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k] \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$ e se $\bar{\sigma}$ é obtido de σ através de uma permutação dos pontos p_0, p_1, \dots, p_k , isto é,

$$\bar{\sigma} = [p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}], \quad \{i_0, i_1, \dots, i_k\} = \{0, 1, \dots, k\},$$

então $\bar{\sigma}(Q^k) = \sigma(Q^k)$ e, portanto, $\sigma \in \mathfrak{s}_k(\Omega) \Rightarrow \bar{\sigma} \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$.

Proposição 5.3. *Seja $\sigma \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$ e seja $\bar{\sigma} \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$ como acima. Então dada $\omega \in F_k(\Omega)$ temos*

$$(5.6) \quad \int_{\bar{\sigma}} \omega = \epsilon[i_0, i_1, \dots, i_k] \int_{\sigma} \omega.$$

Lembre que, como visto no Capítulo 4, $\epsilon[i_0, i_1, \dots, i_k] = \prod_{p < q} \text{sgn}(i_q - i_p)$.

Demonstração. Note que podemos assumir $k \geq 1$ (o caso $k = 0$ é óbvio).

Como primeiro caso vamos supor que $\bar{\sigma}$ é obtido de σ simplesmente trocando por p_0 por p_j , para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Assim teremos

$$\bar{\sigma}(t) = p_j + Bt, \quad t \in Q^k,$$

onde $B \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ é definida por $Be_j = p_0 - p_j$ e $Be_\ell = p_\ell - p_j$ se $\ell \neq j$.

Em um momento provaremos que $\bar{\sigma} = \sigma \circ T$, onde $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é da forma $T = e_j + T^0$, com $T^0 \in L(\mathbb{R}^k)$, satisfazendo $T(Q^k) = Q^k$ e $\det T^0 \neq 0$. Assumamos este fato por um momento.

Se $\omega_\sigma = f(t)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ então

$$(\omega_\sigma)_T = f(T(s))(\det T^0) ds_1 \wedge \dots \wedge ds_k$$

e portanto

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \int_{Q^k} \omega_{\bar{\sigma}} = (\det T^0) \int_{Q^k} f(T(s)) ds.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\int_{Q^k} f(T(s)) ds = \frac{1}{|\det T^0|} \int_{Q^k} f(u) du = \frac{1}{|\det T^0|} \int_{\sigma} \omega,$$

de onde obtemos

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \epsilon \int_{\sigma} \omega,$$

em que $\epsilon = \text{sgn}(\det T^0)$.

Para concluir a demonstração deste caso bastará então mostrar a decomposição $\bar{\sigma} = \sigma \circ T$, onde T satisfaz as propriedades mencionadas e, ademais, $\det T^0 = -1$.

Para determinar T iniciamos escrevendo

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= p_j + \sum_{\ell \neq j} t_{\ell} (p_{\ell} - p_j) + t_j (p_0 - p_j). \\ &= p_0 + \sum_{\ell \neq j} t_{\ell} (p_{\ell} - p_0) + \left(1 - \sum_{\ell=1}^k t_{\ell}\right) (p_j - p_0). \end{aligned}$$

Logo teremos

$$T(t) = (t_1, \dots, t_{j-1}, 1 - \sum_{\ell=1}^k t_{\ell}, t_{j+1}, \dots, t_k) = e_j + \underbrace{(t_1, \dots, t_{j-1}, -\sum_{\ell=1}^k t_{\ell}, t_{j+1}, \dots, t_k)}_{\doteq T^0(t)},$$

e é agora muito fácil verificar que T satisfaz as propriedades desejadas.

Para concluir a demonstração da proposição resta considerar o caso em que $\bar{\sigma}$ é obtido de σ trocando-se p_j por p_{ℓ} ; mas aqui a decomposição $\bar{\sigma} = \sigma \circ T$ é imediata, uma vez que podemos tomar como T a transformação elementar que permuta e_j com e_k e, portanto, o argumento pode ser repetido sem dificuldades. \square

Antes de continuar faremos uma breve digressão. Se A é um conjunto não vazio dizemos que uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é *quase-nula* se o conjunto $\{a \in A : f(a) \neq 0\}$ é finito. O conjunto de todas as funções quase-nulas em A tem a estrutura de um \mathbb{R} -espaço vetorial e é denotado por $\mathbb{R}^{(A)}$. Dado $a \in A$ denotamos por δ_a o elemento de $\mathbb{R}^{(A)}$ definido por $\delta_a(a') = 1$ se $a' = a$, $\delta_a(a') = 0$ se $a' \neq a$. Note que se $f \in \mathbb{R}^{(A)}$ então

$$(5.7) \quad f = \sum_{a \in A} f(a) \delta_a,$$

de onde segue que $\{\delta_a : a \in A\}$ é uma base do \mathbb{R} -espaço vetorial $\mathbb{R}^{(A)}$. Normalmente representamos os elementos de $\mathbb{R}^{(A)}$ como uma *combinação linear formal (finita)* do tipo $\sum_a \lambda_a a$ onde $\lambda_a \in \mathbb{R}$. Deste modo o próprio conjunto A é entendido como uma base para o \mathbb{R} -espaço vetorial $\mathbb{R}^{(A)}$.

Tomando como A o conjunto $\mathfrak{s}_k(\Omega)$, o \mathbb{R} -espaço vetorial correspondente $\mathbb{R}^{(A)}$ é chamado o *espaço das k -cadeias afins em Ω* e é denotado por $\mathfrak{c}_k(\Omega)$. Assim uma k -cadeia afim $\Gamma \in \mathfrak{c}_k(\Omega)$ nada mais é que uma combinação linear formal finita

$$(5.8) \quad \Gamma = \sum_i \lambda_i \sigma_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sigma_i \in \mathfrak{s}_k(\Omega).$$

Se $\Gamma \in \mathfrak{c}_k(\Omega)$ é como em (5.8) e se $\omega \in \mathfrak{F}_k(\Omega)$ definimos

$$(5.9) \quad \int_{\Gamma} \omega = \sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Exemplo 5.3. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 . Então

$$\gamma = 2[0, e_1] + [e_1, e_1 + e_2] + [e_1 + e_2, 0]$$

define uma 1-cadeia afim em \mathbb{R}^2 . Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= 2 \int_{[0, e_1]} df + \int_{[e_1, e_1 + e_2]} df + \int_{[e_1 + e_2, 0]} df \\ &= 2\{f(e_1) - f(0)\} + \{f(e_1 + e_2) - f(e_1)\} + \{f(0) - f(e_1 + e_2)\} \\ &= f(e_1) - f(0). \end{aligned}$$

Vamos agora definir a fronteira de uma cadeia afim; para tal tomemos, primeiramente, $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k] \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$, onde assumimos $k \geq 1$. A *fronteira* de σ é, por definição, a $(k-1)$ -cadeia afim $\partial\sigma \in \mathfrak{c}_{k-1}(\Omega)$ dada por

$$(5.10) \quad \partial\sigma = \sum_{j=0}^k (-1)^j [p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k],$$

onde, como é usual, o termo assinalado por $\widehat{}$ é omitido da expressão. Estendemos, por linearidade, o operador ∂ a uma aplicação \mathbb{R} -linear

$$\partial : \mathfrak{c}_k(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{c}_{k-1}(\Omega).$$

Assim, se Γ é como em (5.8) então

$$\partial\Gamma = \sum_i \lambda_i \partial\sigma_i.$$

Exemplo 5.4. Seja $\sigma = [p_0, p_1]$ um 1-simplexo afim em \mathbb{R}^N (isto é, um segmento orientado). Então

$$\partial\sigma = [p_1] - [p_0].$$

Exemplo 5.5. Seja $\sigma = [p_0, p_1, p_2]$ um 2-simplexo afim em \mathbb{R}^N . Então

$$\partial\sigma = [p_1, p_2] - [p_0, p_2] + [p_0, p_1].$$

Exemplo 5.6. Seja γ a 1-cadeia afim descrita no Exemplo 5.3. Então

$$\partial\gamma = 2\{[e_1] - [0]\} + \{[e_1 + e_2] - [e_1]\} + \{[0] - [e_1 + e_2]\} = [e_1] - [0].$$

Note então que o valor da integral obtido no Exemplo 5.3 pode ser expresso como

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f.$$

Introduziremos agora uma notação que será útil durante toda a exposição. Se $\{e_1, \dots, e_k\}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^k então $\sigma = [0, e_1, \dots, e_k]$ nada mais é que a aplicação identidade $Q^k \rightarrow Q^k$. Por outro lado, escrevendo $\tau_0 = [e_1, \dots, e_k]$ e $\tau_j = [0, e_1, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_k]$ para $j \geq 1$ temos

$$(5.11) \quad \partial[0, e_1, \dots, e_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j \tau_j.$$

Note que τ_j definem aplicações definidas em Q^{k-1} e a valores em Q^k . Logo, se $\sigma \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$ então $\sigma \circ \tau_j \in \mathfrak{s}_{k-1}(\Omega)$ e um momento de reflexão leva à conclusão que

$$(5.12) \quad \partial\sigma = \sum_{j=0}^k (-1)^j (\sigma \circ \tau_j).$$

O Teorema de Stokes (1a. versão)

Passaremos agora à demonstração da primeira versão do importante Teorema de Stokes, que nada mais é que a generalização da igualdade obtida no Exemplo 5.6.

Teorema de Stokes I. *Sejam $k \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\omega \in \mathfrak{F}_{k-1}(\Omega)$ e $\Gamma \in \mathfrak{c}_k(\Omega)$. Então*

$$(5.13) \quad \int_{\partial\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} d\omega.$$

Demonstração. É fácil ver que é suficiente demonstrar (5.13) quando $\Gamma = \sigma \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$. Temos então

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{Q^k} (d\omega)_{\sigma} = \int_{Q^k} d\omega_{\sigma} = \int_{[0, e_1, \dots, e_k]} d\omega_{\sigma}.$$

Por outro lado, por (5.12) e pela Proposição 5.2,

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_{\sigma \circ \tau_j} \omega = \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_{\tau_j} \omega_{\sigma} = \int_{\partial[0, e_1, \dots, e_k]} \omega_{\sigma},$$

o que mostra então que é suficiente demonstrar (5.13) quando $\Gamma = [0, e_1, \dots, e_k]$ (onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^k) e ω é uma $(k-1)$ -forma definida em um aberto de \mathbb{R}^k que contém Q^k . Escrevendo ω na forma

$$\omega = \sum_{j=1}^k \omega_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k$$

vemos, finalmente, que é suficientemente demonstrar (5.13) no caso em que

$$\Gamma = [0, e_1, \dots, e_k] \quad \text{e} \quad \omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_r \wedge \dots \wedge dx_k,$$

onde $r \in \{1, \dots, k\}$ e f é de classe C^∞ em algum aberto que contém Q^k .

Para tal notamos primeiramente que

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_r} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_r} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

e portanto

$$(5.14) \quad \int_{[0, e_1, \dots, e_k]} d\omega = (-1)^{r-1} \int_{Q^k} \frac{\partial f}{\partial x_r}(t) dt.$$

Por outro lado temos

$$(5.15) \quad \int_{\partial[0, e_1, \dots, e_k]} \omega = \int_{\tau_0} \omega + \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{\tau_j} \omega.$$

Seja $j \in \{1, \dots, k\}$ fixado. Escrevendo as coordenadas em Q^{k-1} como $t = (t_1, \dots, \widehat{t_j}, \dots, t_k)$ temos

$$\tau_j(t) = \sum_{\ell \neq j} t_\ell e_\ell = (t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_k)$$

e portanto $\omega_{\tau_j} = 0$ se $j \neq r$ e

$$\omega_{\tau_r} = f(t_1, \dots, t_{r-1}, 0, t_{r+1}, \dots, t_k) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_r} \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Conseqüentemente,

$$(5.16) \quad \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{\tau_j} \omega = (-1)^r \int_{Q^{k-1}} f(t_1, \dots, t_{r-1}, 0, t_{r+1}, \dots, t_k) dt_1 \dots \widehat{dt_r} \dots dt_k.$$

Agora, pela Proposição 5.3,

$$\int_{\tau_0} \omega = (-1)^{r-1} \int_{\bar{\tau}} \omega,$$

onde $\bar{\tau} = [e_r, e_1, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_k]$. Escrevendo, como antes, as coordenadas em Q^{k-1} na forma $t = (t_1, \dots, \widehat{t_r}, \dots, t_k)$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(t) &= e_r + \sum_{j \neq r} t_j (e_j - e_r) \\ &= \left(t_1, \dots, t_{r-1}, 1 - \sum_{j \neq r} t_j, t_{r+1}, \dots, t_k \right), \end{aligned}$$

donde

$$\omega_{\bar{r}} = f \left(t_1, \dots, t_{r-1}, 1 - \sum_{j \neq r} t_j, t_{r+1}, \dots, t_k \right) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_r \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Assim

$$(5.17) \quad \int_{\tau_0} \omega = (-1)^{r-1} \int_{Q^{k-1}} f \left(t_1, \dots, t_{r-1}, 1 - \sum_{j \neq r} t_j, t_{r+1}, \dots, t_k \right) dt_1 \dots \widehat{dt}_r \dots dt_k.$$

De (5.15), (5.16) e (5.17) obtemos então

$$\begin{aligned} \int_{\partial[0, e_1, \dots, e_k]} \omega &= (-1)^r \int_{Q^{k-1}} f(t_1, \dots, t_{r-1}, 0, t_{r+1}, \dots, t_k) dt_1 \dots \widehat{dt}_r \dots dt_k \\ &\quad + (-1)^{r-1} \int_{Q^{k-1}} f \left(t_1, \dots, t_{r-1}, 1 - \sum_{j \neq r} t_j, t_{r+1}, \dots, t_k \right) dt_1 \dots \widehat{dt}_r \dots dt_k \\ &= (-1)^{r-1} \int_{Q^k} \frac{\partial f}{\partial x_r}(t) dt, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo na variável t_r . Tendo em vista (5.14) vemos que a demonstração do Teorema de Stokes está completa. \square

Simplexos e cadeias singulares

Se Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N então uma k -superfície $\xi : Q^k \rightarrow \Omega$ será chamada de *k -simplexo singular em Ω* . O conjunto dos k -simplexos singulares em Ω será denotado por $\mathbf{S}_k(\Omega)$. Note que $\mathbf{s}_k(\Omega) \subset \mathbf{S}_k(\Omega)$.

Como antes, uma *k -cadeia singular em Ω* será uma combinação linear formal finita

$$(5.18) \quad \Theta = \sum_i \lambda_i \xi_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \xi_i \in \mathbf{S}_k(\Omega).$$

O conjunto das k -cadeias singulares, denotado por $\mathbf{C}_k(\Omega)$, tem estrutura de \mathbb{R} -espaço vetorial que contém $\mathbf{c}_k(\Omega)$ como subespaço. Note também que podemos definir, de modo natural, a integral de $\omega \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ sobre Θ definida por (5.18) pela expressão

$$\int_{\Theta} \omega = \sum_i \lambda_i \int_{\xi_i} \omega.$$

Como anteriormente podemos também definir, para cada $k \geq 1$, um operador \mathbb{R} -linear, denominado *operador de fronteira*

$$(5.19) \quad \partial : \mathbf{C}_k(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}_{k-1}(\Omega)$$

que estende o operador $\partial : \mathbf{c}_k(\Omega) \rightarrow \mathbf{c}_{k-1}(\Omega)$ introduzido anteriormente (cf. Exercício 7 do Capítulo 5).

Para definir o operador (5.19) bastará definir $\partial\xi$, com $\xi \in \mathcal{S}_k(\Omega)$. Mas, como antes, $\xi \circ \tau_j \in \mathcal{S}_{k-1}(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, k$, e portanto é natural estender (5.12) para

$$(5.20) \quad \partial\xi \doteq \sum_{j=0}^k (-1)^j \xi \circ \tau_j.$$

O Teorema de Stokes (2a. versão)

Temos agora tudo para demonstrar uma versão mais geral do Teorema de Stokes.

Teorema de Stokes II. *Sejam $k \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\omega \in F_{k-1}(\Omega)$ e $\Theta \in C_k(\Omega)$. Então*

$$(5.21) \quad \int_{\partial\Theta} \omega = \int_{\Theta} d\omega.$$

Demonstração. Como na demonstração do Teorema de Stokes I podemos assumir que $\Theta = \xi \in \mathcal{S}_k(\Omega)$. Como $(d\omega)_\xi = d(\omega_\xi)$, e denotando novamente por $\{e_1, \dots, e_k\}$ a base canônica de \mathbb{R}^k , o Teorema de Stokes I fornece

$$\int_{\xi} d\omega = \int_{[0, e_1, \dots, e_k]} d(\omega_\xi) = \int_{\partial[0, e_1, \dots, e_k]} \omega_\xi = \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_{\tau_j} \omega_\xi = \sum_{j=0}^k (-1)^j \int_{\xi \circ \tau_j} \omega = \int_{\partial\xi} \omega. \quad \square$$

Como consequência desta versão do Teorema de Stokes obtemos uma generalização natural do resultado exposto no Exemplo 5.1. Para tal definiremos

$$Z_k(\Omega) = \left\{ \Theta \in C_k(\Omega) : \int_{\Theta} \beta = 0, \forall \beta \in F_k(\Omega) \right\}.$$

Note que $Z_0(\Omega) = 0$ (ver Exercício 1 do Capítulo 5) mas que isto não se verifica quando $k \geq 1$. Por exemplo, se p_0, p_1 são tais que o segmento que os une está contido em Ω então $0 \neq [p_0, p_1] + [p_1, p_0] \in Z_1(\Omega)$.

Corolário 5.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\omega \in F_k(\Omega)$ uma k -forma fechada ($k \geq 1$). Uma condição necessária para que ω seja exata é que $\int_{\Theta} \omega = 0$ para $\Theta \in C_k(\Omega)$ satisfazendo $\partial\Theta \in Z_{k-1}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha que exista $\alpha \in F_{k-1}(\Omega)$ tal que $d\alpha = \omega$. Então, se Θ é como no enunciado,

$$\int_{\Theta} \omega = \int_{\Theta} d\alpha = \int_{\partial\Theta} \alpha = 0.$$

□

CAPÍTULO 6

Exemplos e aplicações

A fórmula de Green para o disco

Iniciamos o capítulo obtendo a fórmula de Green para um disco no plano cartesiano. Para tal consideremos, primeiramente, um intervalo compacto em \mathbb{R}^2 da forma

$$I = [a, b] \times [c, d],$$

onde $a < b$ e $c < d$. Pelo Teorema de Stokes I e pelo exercício 6 do Capítulo 5 podemos afirmar:

- Se ω é uma 1-forma definida em um aberto Ω de \mathbb{R}^2 que contém I então

$$(6.1) \quad \int_I d\omega = \int_{\Gamma} \omega$$

onde $\Gamma \in \mathbf{c}_1(\Omega)$ é dada por

$$\Gamma = [(a, c), (b, c)] + [(b, c), (b, d)] - [(a, d), (b, d)] - [(a, c), (a, d)].$$

Seja então $J = [0, R] \times [0, 2\pi]$ e consideremos a 2-superfície $\sigma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Note que $\sigma(J) = D$, o disco fechado centrado na origem e de raio R .

Seja então $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ uma 1-forma definida em uma vizinhança de D . Por (6.1) podemos escrever

$$(6.2) \quad \int_J (d\omega)_\sigma = \int_J d(\omega)_\sigma = \int_{\Gamma} \omega_\sigma.$$

Agora, uma vez que

$$d(r \cos \theta) = (\cos \theta) dr - (r \sin \theta) d\theta, \quad d(r \sin \theta) = (\sin \theta) dr + (r \cos \theta) d\theta$$

e que

$$d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) = r dr \wedge d\theta$$

obtemos

$$\begin{aligned} \omega_\sigma &= P(r \cos \theta, r \sin \theta) d(r \cos \theta) + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) d(r \sin \theta) \\ &= \{(\cos \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta) + (\sin \theta) Q(r \cos \theta, r \sin \theta)\} dr \\ &\quad + r \{(\cos \theta) Q(r \cos \theta, r \sin \theta) - (\sin \theta) P(r \cos \theta, r \sin \theta)\} d\theta \end{aligned}$$

e

$$(d\omega)_\sigma = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{\partial P}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right) r dr \wedge d\theta.$$

Substituindo em (6.2) obtemos,

$$\int_J \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{\partial P}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right) r dr d\theta = \int_\Gamma \omega_\sigma$$

ou, ainda,

$$\int_D d\omega = \int_\Gamma \omega_\sigma.$$

Escrevendo $\Gamma = [(0, 0), (R, 0)] + [(R, 0), (R, 2\pi)] - [(0, 2\pi), (R, 2\pi)] - [(0, 0), (0, 2\pi)]$ e observando que um simples cálculo mostra que

$$\int_{[(0,0),(0,2\pi)]} \omega_\sigma = 0, \quad \int_{[(0,0),(R,0)]} \omega_\sigma = \int_{[(0,2\pi),(R,2\pi)]} \omega_\sigma$$

obtemos

$$\int_\Gamma \omega_\sigma = \int_{[(R,0),(R,2\pi)]} \omega_\sigma = \int_\gamma \omega,$$

onde agora $\gamma(\theta) = (R \cos \theta, r \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Concluindo, obtemos a fórmula de Green para o disco D :

- Se D denota o disco fechado centrado na origem e de raio $R > 0$ e se ω é uma 1-forma definida em uma vizinhança de D então

$$(6.3) \quad \int_D d\omega = \oint_{\partial D} \omega,$$

onde a fronteira de D é percorrida uma única vez e no sentido anti-horário.

Abertos regulares

Definição 6.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Diremos que Ω é um aberto regular se existirem abertos $U \supset Q^N$, $V \supset \bar{\Omega}$ e um difeomorfismo de classe C^∞ $\sigma : U \rightarrow V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $\sigma(Q^N) = \bar{\Omega}$;
- (2) $\det \sigma'(x) > 0$ para todo $x \in Q^N$.

O difeomorfismo σ é chamado de uma *parametrização positiva* do aberto regular Ω . Note que $\sigma(\text{Fr}(Q^N)) = \text{Fr}(\Omega)$, onde $\text{Fr}(A)$ denota a fronteira topológica de A , isto é, $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$, e também que $\sigma|_{Q^N}$ define um elemento de $\mathbf{C}_N(V)$.

Lema 6.1. Se Ω é um aberto regular com parametrização positiva σ e se $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$ é uma N -forma definida em alguma vizinhança de $\bar{\Omega}$ então

$$(6.4) \quad \int_\Omega \omega = \int_{\sigma|_{Q^N}} \omega.$$

Demonstração. Uma vez que

$$(\omega)_\sigma = f(\sigma(t)) \det \sigma'(t) dt_1 \wedge \dots \wedge \dots \wedge dt_N$$

temos

$$\int_{\sigma|_{Q^N}} \omega = \int_{Q^N} (\omega)_\sigma = \int_{Q^N} f(\sigma(t)) \det \sigma'(t) dm(t).$$

Como ainda $\det \sigma'(t) > 0$, pelo Teorema de Mudança de Variáveis obtemos então

$$\int_{\sigma|_{Q^N}} \omega = \int_{Q^N} f(\sigma(t)) |\det \sigma'(t)| dm(t) = \int_{\bar{\Omega}} f(x) dm(x) = \int_{\bar{\Omega}} \omega. \quad \square$$

Nas mesmas condições que acima, seja agora α uma $(N - 1)$ -forma definida em uma vizinhança de $\bar{\Omega}$. Pelo Teorema de Stokes II temos

$$\int_{\bar{\Omega}} d\alpha = \int_{\partial(\sigma|_{Q^N})} \alpha,$$

igualdade que mostra, em particular, que o valor do lado direito é independente da parametrização positiva do aberto regular Ω escolhida. Este valor comum é então denotado por $\int_{\partial\Omega} \alpha$ e assim obtemos a *fórmula de Stokes*

$$(6.5) \quad \int_{\bar{\Omega}} d\alpha = \int_{\partial\Omega} \alpha.$$

Por exemplo, quando $N = 2$ temos que α é uma 1-forma, digamos $\alpha = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, com P e Q definidas e de classe C^∞ em um aberto que contém $\bar{\Omega}$. Uma vez que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

então (6.5) se torna a fórmula de Green:

$$(6.6) \quad \int_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dm(x, y) = \int_{\partial\Omega} (Pdx + Qdy).$$

A partir de agora assumiremos $N \geq 3$ e discutiremos o chamado Teorema da Divergência (de Gauss). Iniciamos com uma definição.

Definição 6.2. Dados $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $L \in \mathbf{X}(U)$, $L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \partial/\partial x_j$, definimos o *divergente de L* como sendo o elemento de $C^\infty(U)$ definido por

$$\operatorname{div}(L) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial x_j}.$$

A cada $L \in \mathbf{X}(U)$ associamos uma $(N - 1)$ -forma $\omega^{(L)} \in \mathbf{F}_{N-1}(U)$ pela regra

$$(6.7) \quad \omega^{(L)} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} a_j(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N.$$

Se observarmos que

$$\begin{aligned}
d\omega^{(L)} &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} da_j(x) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N \\
&= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N \\
&= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N \\
&= \operatorname{div}(L) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N
\end{aligned}$$

obtemos, de (6.5), a seguinte conclusão: se Ω é um aberto regular de \mathbb{R}^N e se L é um campo vetorial definido em uma vizinhança de Ω então vale a fórmula de Gauss

$$(6.8) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(L)(x) dm(x) = \int_{\partial\Omega} \omega^{(L)}.$$

Se $\tau_j : Q^{N-1} \rightarrow Q^N$, $j = 0, 1, \dots, N$, são definidas como antes:

$$\tau_0 = [e_1, \dots, e_N], \quad \tau_j = [0, e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_N], \quad j = 1, \dots, N,$$

onde $\{e_1, \dots, e_N\}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^N , então em (6.8) temos

$$(6.9) \quad \int_{\partial\Omega} \omega^{(L)} = \sum_{j=0}^N (-1)^j \int_{Q^{N-1}} (\omega^{(L)})_{\sigma \circ \tau_j}.$$

Aqui σ é qualquer parametrização positiva de Ω . Interpretaremos a seguir cada uma das parcelas do lado direito de (6.9).

Antes de tudo faremos uma pequena pausa para uma recordação.

Digressão. Se $m \geq 3$ e se v_1, \dots, v_{m-1} são vetores em \mathbb{R}^m , $v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jm})$, então o produto vetorial de v_1, \dots, v_{m-1} é definido por

$$v_1 \times \dots \times v_{m-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m-1,1} & v_{m-1,2} & \cdots & v_{m-1,m} \end{vmatrix},$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^m . Assim

$$v_1 \times \dots \times v_{m-1} = \sum_{j=1}^m \{(-1)^{j-1} \det A_j\} e_j,$$

em que A_j é a matriz obtida de

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m-1,1} & v_{m-1,2} & \cdots & v_{m-1,m} \end{bmatrix}$$

eliminando-se a j -ésima coluna. Observamos que:

- v_1, \dots, v_{m-1} são linearmente independentes se, e somente se, $v_1 \times \dots \times v_{m-1} \neq 0$;
- $(v_1 \times \dots \times v_{m-1}) \perp v_j$ para todo $j = 1, \dots, m-1$;
- Se $A = \{a_{ij}\}$ é uma matriz $(m-1) \times (m-1)$ e se $w_i = \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij}v_j$ então

$$w_1 \times \dots \times w_{m-1} = (\det A)(v_1 \times \dots \times v_{m-1}).$$

Retornamos agora à análise de (6.9). Seja $\psi : Q^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ um $(N-1)$ -simplexo singular em \mathbb{R}^N . Assumimos que ψ está definida e é de classe C^∞ em uma vizinhança do fecho de um aberto limitado U de \mathbb{R}^{N-1} que contém Q^{N-1} , que ψ é injetora e que $\psi'(t)$ tem posto $N-1$ para todo t . Então

$$(6.10) \quad S \doteq \psi(U)$$

é uma *hipersuperfície regular parametrizada* em \mathbb{R}^N . Dado $\psi(t_0) \in S$ o espaço tangente a S em $\psi(t_0)$ é o espaço vetorial

$$T_{t_0}S \doteq \text{span} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t_{N-1}}(t_0) \right\}$$

Temos $\dim T_{t_0}S = N-1$, qualquer que seja $t_0 \in U$, uma vez que por definição os vetores $\partial \psi / \partial t_j$ são linearmente independentes. O vetor

$$\vec{N}_\psi(t_0) = \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_0) \times \dots \times \frac{\partial \psi}{\partial t_{N-1}}(t_0)$$

é então normal a $T_{t_0}S$. Note que obtemos um campo de vetores normal e unitário a S pela regra

$$S \ni p \mapsto \vec{n}(p) = \vec{N}_\psi(t) / |\vec{N}_\psi(t)|, \quad \psi(t) = p.$$

Consideremos agora a σ -álgebra de subconjuntos de S definida por

$$\mathcal{M}_S = \{\psi(A) : A \subset U, A \text{ é Lebesgue mensurável}\}$$

e a medida finita $\mathfrak{m}_S : \mathcal{M}_S \rightarrow [0, \infty[$ dada pela regra

$$\mathfrak{m}_S(\psi(A)) \doteq \int_A |\vec{N}_\psi(t)| \, d\mathfrak{m}(t).$$

Esta medida denomina-se *medida de superfície sobre S* . O próximo resultado mostra que tal medida tem um significado invariante:

Proposição 6.1. \mathcal{M}_S e \mathfrak{m}_S dependem só de S e não da parametrização ψ escolhida.

Demonstração. Seja χ uma outra função de classe C^∞ , definida e injetora em uma vizinhança do fecho de um aberto limitado V de \mathbb{R}^{N-1} , $\chi'(s)$ com posto $N-1$ para todo s e tal que $S = \chi(V)$. Devemos mostrar que

$$(6.11) \quad \mathcal{M}_S = \{\chi(B) : B \subset V, B \text{ é Lebesgue mensurável}\}$$

e que

$$(6.12) \quad \int_A |\vec{N}_\psi(t)| dm(t) = \int_B |\vec{N}_\chi(s)| dm(s)$$

se $\psi(A) = \chi(B)$, com $A \subset U$, $B \subset V$ Lebesgue-mensuráveis. Aqui escrevemos

$$\vec{N}_\chi(s) = \frac{\partial \chi}{\partial s_1}(s) \times \dots \times \frac{\partial \chi}{\partial s_{N-1}}(s)$$

Para chegarmos a estas conclusões fixemos primeiramente um ponto arbitrário \bar{t} no domínio de ψ e assumamos que

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_{N-1})}{\partial(t_1, \dots, t_{N-1})}(\bar{t}) \neq 0.$$

Deste modo a função $\tilde{\psi}(t, t_N) = (\psi_1(t), \dots, \psi_N(t) + t_N)$, definida em um aberto de \mathbb{R}^N e a valores em \mathbb{R}^N , tem derivada inversível no ponto $(\bar{t}, 0)$ e portanto, pelo Teorema da Função Inversa, define um difeomorfismo de classe C^∞ entre um aberto contendo $(\bar{t}, 0)$ e um aberto contendo $\psi(\bar{t})$. Em particular, em uma vizinhança de $\psi(\bar{t})$ na imagem de ψ , a função inversa ψ^{-1} é a restrição de uma função de classe C^∞ definida em um aberto de \mathbb{R}^N .

Um segundo de reflexão mostra então que a função $G \doteq \psi^{-1} \circ \chi$ é de fato um difeomorfismo de classe C^∞ entre um aberto que contém \bar{V} e um aberto que contém \bar{U} , de onde (6.11) segue imediatamente. Além disto, como $\chi = \psi \circ G$, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \chi}{\partial s_j}(s) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial G_k}{\partial s_j}(s) \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(G(s)), \quad j = 1, \dots, N-1,$$

de onde segue que

$$\vec{N}_\chi(s) = \{\det G'(s)\} \vec{N}_\psi(G(s)).$$

Assim, pela Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\int_A |\vec{N}_\psi(t)| dm(t) \stackrel{t=G(s)}{=} \int_B |\vec{N}_\psi(G(s))| \cdot |\det G'(s)| dm(s) = \int_B |\vec{N}_\chi(s)| dm(s),$$

o que demonstra (6.12). □

O seguinte resultado nos dá, então, uma descrição precisa de cada parcela do lado direito de (6.8).

Lema 6.2. *Se L é um campo vetorial definido em uma vizinhança de $\psi(Q^{N-1})$ então*

$$(6.13) \quad \int_{Q^{N-1}} (\omega^{(L)})_\psi = \int_{\psi(Q^{N-1})} (L \cdot \vec{n}) dm_S.$$

Demonstração. Como antes vamos escrever $L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \partial/\partial x_j$. Note então, primeiramente, que

$$\int_{\psi(Q^{N-1})} L \cdot \vec{n} \, dm_S = \int_{Q^{N-1}} \left(\vec{a}(\psi(t)) \cdot \vec{N}_\psi(t) \right) dt,$$

onde $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\omega^{(L)})_\psi &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} a_j(\psi(t)) \, d\psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\psi_j} \wedge \dots \wedge d\psi_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} a_j(\psi(t)) \frac{\partial(\psi_1, \dots, \widehat{\psi_j}, \dots, \psi_N)}{\partial(t_1, \dots, t_{N-1})} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{N-1} \\ &= (\vec{a}(t) \cdot \vec{N}_\psi(t)) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{N-1}, \end{aligned}$$

de onde segue a conclusão desejada. \square

Abertos com fronteira regular

Nesta seção obteremos a Fórmula de Stokes para uma importante classe de abertos. Como preparação discutiremos, primeiramente, a existência das chamadas “partições da unidade”, termo que ficará claro no contexto.

Iniciamos introduzindo uma nova notação: dado um aberto U de \mathbb{R}^N denotaremos por $C_c^\infty(U)$ o espaço de todas as funções $f \in C^\infty(U)$ que satisfazem a seguinte propriedade: existe $A \subset U$ compacto tal que $f(x) = 0$ se $x \in U \setminus A$.

Proposição 6.2. *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e sejam U_1, \dots, U_r abertos de \mathbb{R}^N tais que $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_r$. Então existem $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$, $j = 1, \dots, r$, satisfazendo $0 \leq \phi_j \leq 1$ e $\sum_{j=1}^r \phi_j = 1$ em um aberto que contém K .*

A família $\{\phi_j\}$ denomina-se *partição da unidade sobre K associada ao recobrimento aberto $\{U_j\}$* .

Demonstração. Seja $\Omega = \bigcup_{j=1}^r U_j$. Pelo Lema 4.1 existe $g \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq g \leq 1$, $g = 1$ em um aberto que contém K , $g = 0$ no complementar de um subconjunto compacto A de Ω . Afirmamos agora que é possível, para cada $j = 1, \dots, r$, escolher $K_j \subset U_j$ compacto tal que $g = 0$ em $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^r K_j$. De fato, para cada $x \in A$ podemos escolher uma vizinhança compacta K_x de x contida em U_j , para algum $j = j(x)$. Pela propriedade de Heine-Borel podemos, então, encontrar $x_1, \dots, x_p \in A$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^p K_{x_i}$. Basta definir $K_j \doteq \bigcup K_{x_i}$, onde a reunião se dá para o conjunto de índices i tais que $K_{x_i} \subset U_j$.

Isto posto, tomamos, para cada $j = 1, \dots, r$, uma função $g_j \in C_c^\infty(U_j)$, satisfazendo $0 \leq g_j \leq 1$, $g_j = 1$ em K_j e definimos

$$\phi_1 = gg_1, \phi_2 = gg_2(1 - g_1), \dots, \phi_r = gg_r(1 - g_1) \cdots (1 - g_{r-1}).$$

Então $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$, $0 \leq \phi_j \leq 1$ e um simples cálculo fornece a igualdade

$$g - \sum_{j=1}^r \phi_j = g(1 - g_1) \cdots (1 - g_r)$$

Como g se anula no complemento de $\bigcup_{j=1}^r K_j$, e como dado qualquer ponto $x \in \bigcup_{j=1}^r K_j$ existe i tal que $g_i(x) = 1$ segue que $g - \sum_{j=1}^r \phi_j = 0$ e portanto $\sum_{j=1}^r \phi_j = 1$ em uma vizinhança de K . \square

Na próxima definição denotaremos por I^N o intervalo unitário centrado na origem em \mathbb{R}^N :

$$I^N \doteq]-1, 1[^N = \{t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N : |t_j| < 1, j = 1, \dots, N\}.$$

Definição 6.3. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Dizemos que Ω é um aberto com fronteira regular se dado $x_0 \in \partial\Omega$ existem um aberto U em \mathbb{R}^N contendo x_0 e um difeomorfismo $h : I^N \rightarrow U$, de classe C^∞ , tal que*

$$h(I^{N-1} \times]0, 1]) = \Omega \cap U, \quad h(I^{N-1} \times \{0\}) = \partial\Omega \cap U.$$

Note que não há perda de generalidade se assumirmos que a aplicação h está, na realidade, definida e é de classe C^∞ em um aberto que contém o fecho de I^N . Note também que, trocando h por $t \mapsto h(-t_1, t_2, \dots, t_N)$ se necessário, podemos sempre assumir que $\det h' > 0$ em I^N .

O exercício 10 do capítulo 6 fornece uma importante caracterização para esta classe de abertos.

Suponhamos agora que $N \geq 3$ e escrevamos $t = (t', t_N) \in \mathbb{R}^N$, $t' = (t_1, \dots, t_{N-1})$. A aplicação

$$h_0 : I^{N-1} \rightarrow \partial\Omega, \quad h_0(t') = h(t', 0)$$

tem como imagem $\partial\Omega \cap U$, o que mostra que este conjunto é uma hipersuperfície regular parametrizada em \mathbb{R}^N . A medida de superfície em $\partial\Omega \cap U$ é dada por

$$\mathbf{m}_{\partial\Omega \cap U}(E) = \int_{h_0^{-1}(E)} |\vec{N}_{h_0}(t')| \, d\mathbf{m}(t'),$$

onde $E \subset \partial\Omega \cap U$ é $\mathcal{M}_{\partial\Omega \cap U}$ -Lebesgue-mensurável.

Através do uso de partições da unidade podemos então definir globalmente a medida de superfície sobre $\partial\Omega$.

Proposição 6.3. *Sejam V_1, \dots, V_m subconjuntos abertos de \mathbb{R}^N satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (1) $\partial\Omega \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$;
- (2) Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ existe um difeomorfismo $h_j : I^N \rightarrow V_j$, de classe C^∞ e definido em uma vizinhança do fecho de I^N , tal que

$$h_j(I^{N-1} \times \{0\}) = \partial\Omega \cap V_j.$$

Seja $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ uma partição da unidade sobre $\partial\Omega$ associada ao recobrimento aberto $\{V_1, \dots, V_m\}$. Defina $\mathcal{M}_{\partial\Omega}$ como sendo a coleção de todos os subconjuntos A de $\partial\Omega$ tais que $A \cap V_j \in \mathcal{M}_{\partial\Omega \cap V_j}$ para todo $j = 1, \dots, m$. Defina também $\mathfrak{m}_{\partial\Omega} : \mathcal{M}_{\partial\Omega} \rightarrow [0, \infty[$ pela fórmula

$$(6.14) \quad \mathfrak{m}_{\partial\Omega}(A) = \sum_{j=1}^m \int_{A \cap V_j} \phi_j(p) \, d\mathfrak{m}_{\partial\Omega \cap V_j}(p).$$

Então $\mathcal{M}_{\partial\Omega}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de $\partial\Omega$ e $\mathfrak{m}_{\partial\Omega}$ é uma medida finita sobre $\mathcal{M}_{\partial\Omega}$. Além do mais, $\mathcal{M}_{\partial\Omega}$ e $\mathfrak{m}_{\partial\Omega}$ independem da escolha de $\{V_1, \dots, V_m\}$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ satisfazendo as propriedades requeridas.

A demonstração deste resultado é o conteúdo do exercício 7 do Capítulo 6.

A medida $\mathfrak{m}_{\partial\Omega}$ denomina-se *medida (de Lebesgue) de superfície sobre a fronteira de Ω* . Note que se $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{M}_{\partial\Omega}$ -mensurável e limitada então

$$\int_{\partial\Omega} f(p) \, d\mathfrak{m}_{\partial\Omega}(p) = \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \phi_j(p) f(p) \, d\mathfrak{m}_{\partial\Omega \cap V_j}(p).$$

A fórmula de Stokes para abertos com fronteira regular

Fixemos então Ω um aberto com fronteira regular em \mathbb{R}^N . Pela propriedade de Heine-Borel podemos recobrir $\partial\Omega$ por abertos U_2, \dots, U_r onde, para cada $j = 2, \dots, r$, vale a seguinte propriedade:

- Existe um difeomorfismo $h_j : I^N \rightarrow U_j$, de classe C^∞ e definido em uma vizinhança do fecho de I^N , tal que $\det h'_j > 0$ em I^N e

$$h_j(I^{N-1} \times]0, 1[) = \Omega \cap U_j, \quad h_j(I^{N-1} \times \{0\}) = \partial\Omega \cap U_j.$$

Tomemos finalmente um aberto $U_1 \subset\subset \Omega$ tal que $\bar{\Omega} \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ bem como uma partição da unidade $\{\phi_j\}$ sobre $\bar{\Omega}$ associada ao recobrimento aberto $\{U_j\}$. Se ω é uma $(N-1)$ -forma diferencial definida em um aberto que contém $\bar{\Omega}$ temos, em uma vizinhança de $\bar{\Omega}$,

$$d\omega = d\left(\sum_{j=1}^r \phi_j \omega\right)$$

e portanto

$$\int_{\bar{\Omega}} d\omega = \int_{\bar{\Omega}} d(\phi_1 \omega) + \sum_{j=2}^r \int_{\bar{\Omega}} d(\phi_j \omega).$$

Agora, pelo Exercício 1 do Capítulo 6,

$$\int_{\bar{\Omega}} d(\phi_1 \omega) = 0,$$

enquanto que, para cada $j = 2, \dots, r$,

$$\int_{\bar{\Omega}} d(\phi_j \omega) = \int_{\bar{\Omega} \cap U_j} d(\phi_j \omega) \stackrel{(\star)}{=} \int_{I^{N-1} \times [0,1[} [d(\phi_j \omega)]_{h_j} = \int_{I^{N-1} \times [0,1[} d(\phi_j \omega)_{h_j},$$

onde em (\star) evocamos o resultado enunciado na Proposição 5.1, lembrando que $\det h'_j > 0$.

Seja $K \subset U_j$ compacto tal que ϕ_j se anula em seu complementar. Então se escrevermos

$$(\phi_j \omega)_{h_j} = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \alpha_{jk}(t) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_k} \wedge \dots \wedge dt_N$$

as funções $\alpha_{jk}|_{I^{N-1} \times [0,1[}$ se anularão no complementar de $h_j^{-1}(K) \cap (I^{N-1} \times [0,1[)$ e portanto, para algum $0 < \delta < 1$, teremos que $\alpha_{jk}|_{I^{N-1} \times [0,1[}$ se anulam no complementar do intervalo $[-\delta, \delta]^{N-1} \times [0, \delta]$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo concluimos que

$$\int_{I^{N-1} \times [0,1[} \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial t_k}(t) dm(t) = 0, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

e portanto que

$$\begin{aligned} \int_{I^{N-1} \times [0,1[} d(\phi_j \omega)_{h_j} &= \int_{I^{N-1} \times [0,1[} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial t_k}(t) \right\} dm(t) \\ &= \int_{I^{N-1} \times [0,1[} \frac{\partial \alpha_{jN}}{\partial t_N}(t) dm(t) \\ &= - \int_{I^{N-1}} \alpha_{jN}(t', 0) dm(t'). \end{aligned}$$

Lembrando a notação $h_{j0}(t') = h_j(t', 0)$ e observando que $h_{j0} = h_j \circ \theta$, onde $\theta : I^{N-1} \rightarrow I^N$ é definida por $\theta(t') = (t', 0)$, podemos escrever

$$- \int_{I^{N-1}} \alpha_{jN}(t', 0) dm(t') = (-1)^N \int_{I^{N-1}} [(\phi_j \omega)_{h_j}]_{\theta} = (-1)^N \int_{I^{N-1}} (\phi_j \omega)_{h_{j0}},$$

de onde segue a seguinte versão da Fórmula de Stokes:

$$(6.15) \quad \int_{\bar{\Omega}} d\omega = (-1)^N \sum_{j=2}^r \int_{I^{N-1}} (\phi_j \omega)_{h_{j0}}.$$

Note que o lado direito fornece, de maneira precisa, a “integração” da $(N-1)$ -forma sobre $\partial\Omega$. Note que este valor é independente das escolhas das parametrizações h_j e da partição da unidade escolhida, uma vez que o lado esquerdo de (6.15) independe de tais escolhas.

O Teorema da divergência

A fórmula de Stokes 6.15 pode ser aplicada para a obtenção do importante Teorema da Divergência. Para tal faremos porém uma pausa para descrever a construção do *campo normal exterior* a Ω onde este último é, como antes, um aberto com fronteira regular. Mantemos a notação previamente estabelecida.

Se $j, k \in \{2, \dots, r\}$ são tais que $\partial\Omega \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então

$$\vec{N}_{h_{j0}}(t') = \det\{(h_{k0}^{-1} \circ h_{j0})'(t')\} \vec{N}_{h_{k0}}((h_{k0}^{-1} \circ h_{j0})(t'))$$

para $t' \in h_{j0}^{-1}(\Omega \cap U_j \cap U_k)$ (cf. a demonstração da Proposição 6.1). Afirmamos primeiramente que

$$(6.16) \quad \det\{(h_{k0}^{-1} \circ h_{j0})'(t')\} > 0, \quad t' \in h_{j0}^{-1}(\Omega \cap U_j \cap U_k).$$

Para a demonstração de 6.16 escrevamos $G(t) = (h_k^{-1} \circ h_j)(t)$, definida no subconjunto aberto $h_j^{-1}(\Omega \cap U_j \cap U_k)$ de I^N . Temos $\det G'(t) > 0$ para todo t e também $G(t', 0) = (G_0(t'), 0)$, onde $G_0(t') = (h_{k0}^{-1} \circ h_{j0})(t')$. Se escrevermos $G(t) = (G_1(t), \dots, G_N(t))$ as informações precedentes implicam que a última linha da matriz que representa $G'(t', 0)$ é igual a

$$\left[0, \dots, 0, \frac{\partial G_N}{\partial t_N}(t', 0) \right].$$

Por outro lado uma vez que G aplica $(h_j^{-1}(\Omega \cap U_j \cap U_k)) \cap (I^{N-1} \times [0, 1])$ em $I^{N-1} \times [0, 1]$ segue que

$$\frac{\partial G_N}{\partial t_N}(t', 0) \geq 0.$$

Assim desenvolvendo o cálculo de $\det G'(t', 0)$ pela regra de Laplace a partir da última linha obtemos

$$\det G'(t', 0) = (-1)^{2N} \det G'_0(t') \frac{\partial G_N}{\partial t_N}(t', 0)$$

e portanto $\det G'_0(t') > 0$, que é precisamente 6.16.

Se definirmos $\vec{n}_j : \partial\Omega \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^N$ pela relação

$$\vec{n}_j(p) = (-1)^N \frac{\vec{N}_{h_{j0}}(t')}{\left| \vec{N}_{h_{j0}}(t') \right|} \quad \text{se } p = h_{j0}(t')$$

concluimos de 6.16 que $\vec{n}_j = \vec{n}_k$ em $\partial\Omega \cap U_j \cap U_k$, caso esta intersecção for não vazia. Deste modo obtemos então um campo vetorial bem definido sobre $\partial\Omega$ pela regra

$$\vec{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \vec{n}(p) = \vec{n}_j(p) \quad \text{se } p \in \partial\Omega \cap U_j$$

Mostraremos agora que este campo vetorial \vec{n} “aponta para fora” de Ω , em um sentido bastante preciso, justificando assim denominá-lo *campo normal unitário exterior a Ω* . Este é o significado de nosso próximo resultado:

Proposição 6.4. *Seja $p \in \partial\Omega$. Existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$(6.17) \quad p + \tau \vec{n}(p) \in \Omega, \quad \tau \in] - \epsilon, 0[, \quad p + \tau \vec{n}(p) \notin \bar{\Omega}, \quad \tau \in]0, \epsilon[.$$

Demonstração. Seja $j \in \{2, \dots, r\}$ tal que $p \in U_j$. Assim (6.17) é equivalente à existência de $\epsilon > 0$ tal que

$$h_j^{-1}(p + \tau \vec{n}(p)) \in I^{N-1} \times]0, 1[, \quad \tau \in] - \epsilon, 0[, \quad h_j^{-1}(p + \tau \vec{n}(p)) \in I^{N-1} \times] - 1, 0[, \quad \tau \in]0, \epsilon[.$$

e, portanto, para mostrar (6.17) é suficiente mostrar que

$$(6.18) \quad \frac{d}{d\tau} \{h_j^{-1}(p + \tau \vec{n}(p)) \cdot e_N\} |_{\tau=0} < 0.$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{d\tau} \{h_j^{-1}(p + \tau \vec{n}(p)) \cdot e_N\} |_{\tau=0} = (h_j^{-1})'(p)(\vec{n}(p)) \cdot e_N.$$

Se tomarmos $t' \in I^{N-1}$ tal que $h_j(t', 0) = p$ então $(h_j^{-1})'(p) = (h'_j(t', 0))^{-1}$. Observando agora nossa construção do campo \vec{n} vemos que verificar (6.18) é equivalente a verificar

$$(6.19) \quad (-1)^N (h'_j(t', 0))^{-1} (\vec{N}_{h_{j0}}(t')) \cdot e_N = (-1)^N \vec{N}_{h_{j0}}(t') \cdot {}^t(h'_j(t', 0))^{-1} e_N < 0.$$

Para cada $\ell \in \{1, \dots, N\}$ seja A_ℓ a matriz obtida de

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_{j1}}{\partial t_1}(t', 0) & \cdots & \frac{\partial h_{jN}}{\partial t_1}(t', 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{j1}}{\partial t_{N-1}}(t', 0) & \cdots & \frac{\partial h_{jN}}{\partial t_{N-1}}(t', 0) \end{bmatrix}$$

omitindo-se a ℓ -ésima coluna. Então

$$\vec{N}_{h_{j0}}(t') = \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell-1} (\det A_\ell) e_\ell$$

enquanto que ${}^t(h'_j(t', 0))^{-1} e_N$ pode ser identificado à N -ésima coluna da matriz dos cofatores da jacobiana de h_j no ponto $(t', 0)$ multiplicada por $1/\det h'_j(t', 0)$, isto é,

$${}^t(h'_j(t', 0))^{-1} e_N = \frac{1}{\det h'_j(t', 0)} \sum_{\ell=1}^N (-1)^{N+\ell} (\det {}^t A_\ell) e_\ell.$$

Consequentemente

$$(-1)^N \vec{N}_{h_{j0}}(t') \cdot {}^t(h'_j(t', 0))^{-1} e_N = \frac{-1}{\det h'_j(t', 0)} \sum_{\ell=1}^N (\det A_\ell)^2 < 0,$$

o que conclui a demonstração da proposição. \square

Retornamos agora ao Teorema da Divergência. Seja $L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \partial/\partial x_j$ um campo diferencial definido em uma vizinhança de $\bar{\Omega}$ e tomemos a forma $\omega^{(L)}$ como em (6.7). Pela fórmula de Stokes 6.15 temos

$$\int_{\bar{\Omega}} \operatorname{div}(L)(x) dm(x) = \int_{\bar{\Omega}} d\omega^{(L)} = (-1)^N \sum_{j=2}^r \int_{I^{N-1}} (\phi_j \omega^{(L)})_{h_{j0}}.$$

Por outro lado de acordo com o argumento apresentado na demonstração do Lema 6.2 podemos escrever

$$(\phi_j \omega^{(L)})_{h_{j0}} = \phi_j(h_{j0}(t')) \vec{a}(h_{j0}(t')) \cdot \vec{N}_{h_{j0}}(t') dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{N-1},$$

onde $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Logo

$$(6.20) \quad \int_{\bar{\Omega}} \operatorname{div}(L)(x) dm(x) = \sum_{j=2}^r \int_{\partial\Omega \cap U_j} \phi_j(p) \vec{a}(p) \cdot \vec{n}(p) dm_{\partial\Omega \cap U_j}(p).$$

Finalmente, a Proposição 6.3 e a observação que a segue permitem escrever a conhecida fórmula da divergência

$$(6.21) \quad \int_{\bar{\Omega}} \operatorname{div}(L)(x) dm(x) = \int_{\partial\Omega} \vec{a}(p) \cdot \vec{n}(p) dm_{\partial\Omega}(p).$$

A fórmula de Stokes para formas de classe C^1

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$ denotamos por $F_k^{(\ell)}(\Omega)$ o espaço das formas expressas como em (4.9) em que os coeficientes ω_j são agora funções de classe C^ℓ em Ω . Note que $F_k(\Omega) \subset F_k^{(\ell)}(\Omega)$ para todo $\ell \geq 0$ e também que a derivada exterior define aplicações \mathbb{R} -lineares

$$d : F_k^{(\ell)}(\Omega) \longrightarrow F_{k+1}^{(\ell-1)}(\Omega), \quad \ell \geq 1.$$

Sejam $U \subset \mathbb{R}^M$ aberto e $F : \Omega \rightarrow U$ uma função de classe C^1 . A operação de pullback define uma aplicação \mathbb{R} -linear $F_k^{(0)}(U) \rightarrow F_k^{(0)}(\Omega)$. Assim, se definirmos uma k -superfície de classe C^1 em Ω como sendo uma aplicação $\Phi : B^k \rightarrow \Omega$ de classe C^1 , dada $\omega \in F_k^{(0)}(\Omega)$ fica bem definida a integral $\int_{\Phi} \omega$. Note também que com tal extensão podemos naturalmente introduzir o espaço $C_k^{(1)}(\Omega)$ das k -cadeias singulares de classe C^1 em Ω . Neste caso o operador de fronteira (5.19) admite uma extensão \mathbb{R} -linear

$$\partial : C_k^{(1)}(\Omega) \longrightarrow C_{k-1}^{(1)}(\Omega)$$

também dada por (5.20).

Uma cuidadosa análise das demonstrações apresentadas permite as seguintes conclusões:

- (1) O teorema de Stokes I é válido assumindo $\omega \in F_{k-1}^{(1)}(\Omega)$.
- (2) O teorema de Stokes II é válido assumindo $\omega \in F_{k-1}^{(1)}(\Omega)$ e $\Theta \in C_k^{(1)}(\Omega)$.

Analogamente as noções de aberto regular e de aberto com fronteira regular admitem suas versões de classe C^1 . Para o primeiro basta impor que o difeomorfismo σ introduzido na definição 6.1 seja de classe C^1 enquanto que para o segundo impomos que a parametrização h em 6.3 seja de classe C^1 . Neste último caso a construção de $m_{\partial\Omega}$ é análoga.

A fórmula de Stokes (6.5) continua válida assumindo que Ω seja um aberto regular de classe C^1 e que a forma α tenha coeficientes de classe C^1 . Do mesmo modo (6.15) é válida assumindo que Ω seja um aberto com fronteira regular de classe C^1 e que ω tenha coeficientes de classe C^1 . Em particular vale a fórmula da divergência (6.21) para abertos com fronteira regular de classe C^1 assumindo que as componentes do campo L sejam funções de classe C^1 .

Referências Bibliográficas

- [S] H. Sussmann, “Real variables”, notas de aula de disciplina ministrada no Departamento de Matemática, Rutgers University, Outono de 1980/Primavera de 1981.

- [Ro] H.L. Royden, Real Variables (second edition) MacMillan Publishing Co., New York, 1968.

- [Ru] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis (third edition), International Student Edition, McGraw-Hill, 1976.

APÊNDICE A

A cohomologia de De Rham

Complexos de espaços vetoriais

Seja $\{E_n\}_{n \geq 0}$ uma seqüência de \mathbb{R} -espaços vetoriais e suponhamos que para cada n seja dada uma transformação $T_n \in L(E_n, E_{n+1})$. A seqüência

$$(A.1) \quad \mathcal{E} : E_0 \xrightarrow{T_0} E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} E_n \xrightarrow{T_n} E_{n+1} \xrightarrow{T_{n+1}} \cdots$$

denomina-se um *complexo de \mathbb{R} -espaços vetoriais* se, para todo $n \geq 1$, tem-se $T_n \circ T_{n-1} = 0$. Em outras palavras, \mathcal{E} define um complexo de \mathbb{R} -espaços vetoriais se, para cada $n \geq 1$,

$$(A.2) \quad \Im T_{n-1} \subset \ker T_n.$$

Dizemos que o complexo \mathcal{E} é *exato no grau* $m \geq 1$ se

$$(A.3) \quad \Im T_{m-1} = \ker T_m.$$

Para se “medir” o quanto um complexo de \mathbb{R} -espaços vetoriais deixa de ser exato introduzimos seus espaços de cohomologia. Para o complexo (A.1) definimos¹

$$(A.4) \quad H^0(\mathcal{E}) = \ker T_0, \quad H^n(\mathcal{E}) = \ker T_n / \Im T_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Os espaços vetoriais $H^n(\mathcal{E})$, $n \geq 0$, denominam-se *espaços de cohomologia do complexo \mathcal{E}* . Note então que \mathcal{E} é exato no grau m se, e somente se, $H^m(\mathcal{E}) = 0$.

Lema A.1. *Sejam*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : E_0 &\xrightarrow{T_0} E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} E_n \xrightarrow{T_n} E_{n+1} \xrightarrow{T_{n+1}} \cdots \\ \mathcal{F} : F_0 &\xrightarrow{S_0} F_1 \xrightarrow{S_1} F_2 \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_{n-1}} F_n \xrightarrow{S_n} F_{n+1} \xrightarrow{S_{n+1}} \cdots \end{aligned}$$

complexos de \mathbb{R} -espaços vetoriais e suponhamos que, para cada $n \geq 0$, seja dada $\lambda_n \in L(E_n, F_n)$ satisfazendo

$$(A.5) \quad \lambda_n \circ T_{n-1} = S_{n-1} \circ \lambda_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Então, para cada $n \geq 0$ temos $\lambda_n(\ker T_n) \subset \ker S_n$ e para cada $n \geq 1$ temos $\lambda_n(\Im T_{n-1}) \subset \Im S_{n-1}$. Em particular, λ_n induz aplicações \mathbb{R} -lineares

$$\lambda_n^* : H^n(\mathcal{E}) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}), \quad n \geq 0.$$

Além disso, λ_n^ são isomorfismos se as aplicações λ_n o forem.*

¹Lembre que se E é um \mathbb{R} -espaço vetorial, e $F \subset E$ um de seus subespaços, o espaço quociente E/F nada mais é que o espaço E módulo a seguinte relação de equivalência \sim : se $x, y \in E$ então $x \sim y$ se $x - y \in F$. É muito fácil ver que E/F tem, também, a estrutura de um \mathbb{R} -espaço vetorial.

Demonstração. Se $x \in \ker T_n$ então $S_n(\lambda_n(x)) = \lambda_{n+1}(T_n(x)) = 0$ e portanto $\lambda_n(x) \in \ker S_n$. Agora, se $x \in \mathfrak{S} T_{n-1}$ então $x = T_{n-1}(y)$ para algum $y \in E_{n-1}$. Do mesmo modo, $\lambda_n(x) = \lambda_n(T_{n-1}(y)) = S_{n-1}(\lambda_{n-1}(y))$ e portanto $\lambda_n(x) \in \mathfrak{S} S_{n-1}$. Seja $[x] \in H^n(\mathcal{E})$ a classe definida por $x \in \ker T_n$. Então pelas propriedades precedentes, a classe definida por $\lambda_n(x)$ em $H^n(\mathcal{F})$ independe da escolha do representante x . Isto torna bem definida a aplicação λ_n^* pela regra $\lambda_n^*([x]) = [\lambda_n(x)]$.

Finalmente, se cada λ_n é um isomorfismo então (A.5) implica que $T_{n-1} \circ \lambda_{n-1}^{-1} = \lambda_n^{-1} \circ S_{n-1}$. Pelo raciocínio anterior λ_n^{-1} induz uma aplicação linear $(\lambda_n^{-1})^* : H^n(\mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{E})$ que é, obviamente, a inversa de λ_n^* . \square

A cohomologia de De Rham

Se Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N então os espaços de cohomologia (de De Rham) de Ω , denotados por $H^n(\Omega)$, $n \geq 0$, são, por definição, os espaços de cohomologia do complexo de \mathbb{R} -espaços vetoriais dado por

$$C^\infty(\Omega) = F_0(\Omega) \xrightarrow{d} F_1(\Omega) \xrightarrow{d} F_2(\Omega) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} F_n(\Omega) \xrightarrow{d} F_{n+1}(\Omega) \xrightarrow{d} \cdots$$

Explicitamente, temos então

$$H^0(\Omega) = \ker \left(C^\infty(\Omega) \xrightarrow{d} F_1(\Omega) \right);$$

$$H^n(\Omega) = \frac{\ker \left(F_n(\Omega) \xrightarrow{d} F_{n+1}(\Omega) \right)}{\mathfrak{S} \left(F_{n-1}(\Omega) \xrightarrow{d} F_n(\Omega) \right)}, \quad n \geq 1.$$

Tomemos agora um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^M e $F : \Omega \rightarrow U$ uma aplicação de classe C^∞ . A aplicação F induz aplicações lineares $\lambda_n : F_n(U) \rightarrow F_n(\Omega)$, $\lambda_n(\omega) = \omega_F$. Uma vez que $d(\omega_F) = (d\omega)_F$ segue que (A.5) está satisfeita, de onde concluímos que a aplicação “pullback por F ” induz aplicações lineares $H^n(U) \rightarrow H^n(\Omega)$. Em particular do Lema A.1 obtemos o seguinte resultado:

Proposição A.1. *Se Ω e U são abertos de \mathbb{R}^N e se existir uma difeomorfismo de classe C^∞ de Ω sobre U então $H^n(\Omega) \simeq H^n(U)$ para todo $n \geq 0$.*

Vejamos agora algumas propriedades dos espaços de cohomologia $H^n(\Omega)$.

Proposição A.2. *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .*

- (1) $H^n(\Omega) = 0$ se $n > N$;
- (2) Se $\kappa = |\{V : V \text{ é componente conexa de } \Omega\}|$ então $H^0(\Omega)$ é igual ao produto cartesiano de κ cópias de \mathbb{R} ,²
- (3) Se Ω é estrelado então $H^0(\Omega) \simeq \mathbb{R}$ e $H^n(\Omega) = 0$ para todo $n \geq 1$.

²O número de componentes conexas de um aberto de \mathbb{R}^N ou é finito ou é (infinito) enumerável (propriedade de Lindelöf). Neste último caso $H^0(\Omega)$ será então o \mathbb{R} -espaço vetorial formado por todas as seqüências de números reais.

Demonstração. (1) segue do fato que $F_n(\Omega) = 0$ se $n > N$. Para (2) é suficiente observar que $H^0(\Omega)$ é formado pelas funções com diferencial nulo, isto é, as funções que são constantes em cada componente conexa de Ω . Finalmente, (3) segue do Lema de Poincaré (Capítulo 4) e do fato que todo aberto estrelado é, necessariamente, conexo. \square

Observação. É possível mostrar que $H^N(\Omega) = 0$ para todo aberto Ω de \mathbb{R}^N . Infelizmente as técnicas requeridas para sua demonstração fogem do escopo deste curso (cf. Exercício 5 do Apêndice).

Assim, para se determinar a cohomologia de um aberto de \mathbb{R}^N é suficiente determinar $H^n(\Omega)$ para $1 \leq n \leq N - 1$.

O caso $N = 2$ é particularmente interessante. Para um aberto Ω de \mathbb{R}^2 o único espaço que precisa ser determinado é $H^1(\Omega)$. Por exemplo, se existir um difeomorfismo de classe C^∞ entre Ω e o disco unitário $D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ então $H^1(\Omega) = 0$. Vale a recíproca deste fato, que é um resultado não elementar e cuja demonstração segue do famoso *Teorema de Riemann* da teoria das funções analíticas de uma variável complexa: se Ω é um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 com $H^1(\Omega) = 0$ então existe um difeomorfismo de classe C^∞ entre Ω e D . O próximo resultado determina completamente a cohomologia do plano com sua origem removida.

Teorema A.1. Se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então $H^1(\Omega) \simeq \mathbb{R}$. Mais precisamente, se

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

e se $\xi \in H^1(\Omega)$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\xi = \lambda[\alpha]$ (lembre que, de acordo com a discussão que segue o Exemplo 5.1, $[\alpha] \neq 0$ em $H^1(\Omega)$).

Demonstração. Seja $W \doteq \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ e considere a aplicação $F : W \rightarrow \Omega$ dada por $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Observe que

$$\begin{aligned} \alpha_F &= \frac{-r \sin \theta}{r^2} d(r \cos \theta) + \frac{r \cos \theta}{r^2} d(r \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r} \{ -(\sin \theta) [(\cos \theta) dr - (r \sin \theta) d\theta] + (\cos \theta) [(\sin \theta) dr + (r \cos \theta) d\theta] \} \\ &= d\theta. \end{aligned}$$

Vamos transferir nossa análise para o aberto W , isto é, vamos trabalhar nas variáveis (r, θ) . Para tal é fundamental observar que agora $C^\infty(\Omega)$ se identifica com o espaço

$$\mathcal{A} \doteq \{u \in C^\infty(W) : u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi), (r, \theta) \in W\}$$

enquanto que $F_1(\Omega)$ se identifica com o espaço

$$\mathcal{A}_1 \doteq \{\omega = a dr + b d\theta \in F_1(W) : a, b \in \mathcal{A}\}.$$

Desta maneira podemos escrever

$$(A.6) \quad H^1(\Omega) \simeq \frac{\{\omega \in \mathcal{A}_1 : d\omega = 0\}}{\{du : u \in \mathcal{A}\}}$$

e portanto o teorema ficará demonstrado se verificarmos que

$$(A.7) \quad \frac{\{\omega \in \mathcal{A}_1 : d\omega = 0\}}{\{du : u \in \mathcal{A}\}} = \{\lambda[d\theta] : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Iniciamos mostrando um resultado preliminar:

Lema A.2. *Seja $f \in \mathcal{A}$. Uma condição necessária e suficiente para que exista $u \in \mathcal{A}$ satisfazendo $\partial u / \partial \theta = f$ é que*

$$(A.8) \quad \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta = 0, \quad \forall r > 0.$$

Demonstração. Se tal u existe então

$$\int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta = 0 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta = u(r, 2\pi) - u(r, 0) = 0.$$

Reciprocamente, se (A.8) é satisfeita então

$$u(r, \theta) \doteq \int_0^\theta f(r, \theta') d\theta'$$

satisfaz $\partial u / \partial \theta = f$ e pertence a \mathcal{A} , uma vez que, para todo $r > 0$,

$$u(r, \theta + 2\pi) - u(r, \theta) = \int_\theta^{\theta+2\pi} f(r, \theta') d\theta' = \int_0^{2\pi} f(r, \theta') d\theta' = 0. \quad \square$$

Passaremos agora à demonstração de (A.7). Temos que verificar que dada qualquer $\omega \in \mathcal{A}_1$ satisfazendo $d\omega = 0$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(A.9) \quad \omega - \lambda d\theta \in \{dv : v \in \mathcal{A}\}.$$

Tomemos então uma tal $\omega = adr + bd\theta$. Temos

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} b(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial b}{\partial r}(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial a}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta = a(r, 2\pi) - a(r, 0) = 0$$

e portanto

$$\int_0^{2\pi} b(r, \theta) d\theta \doteq \kappa \text{ (constante!).}$$

Seja

$$\tilde{\omega} \doteq \omega - \frac{\kappa}{2\pi} d\theta = adr + \tilde{b}d\theta.$$

Note que $\tilde{\omega} \in \mathcal{A}_1$, que $d\tilde{\omega} = 0$ e que

$$\int_0^{2\pi} \tilde{b}(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} b(r, \theta) d\theta - \kappa = 0.$$

Pelo Lema A.2 existe $u \in \mathcal{A}$ tal que $\partial u / \partial \theta = \tilde{b}$. Temos

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \tilde{b} d\theta = \tilde{\omega} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} - a \right) dr$$

e, como $d\tilde{\omega} = 0$, temos também

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial r} - a\right) \wedge dr = 0.$$

Isto é o mesmo que dizer que a expressão entre parêntesis é uma função $v(r)$ (independente de θ). Assim

$$d\left(\underbrace{u - \int_0^r v(s)ds}_{\in \mathcal{A}}\right) = \tilde{\omega}$$

e portanto vale (A.9) com $\lambda = \kappa/(2\pi)$. Isto conclui a demonstração. \square

APÊNDICE B

Exercícios

Capítulo 1

1. Seja X um conjunto não vazio e seja \mathcal{C} um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Suponha $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Mostre que existe a menor σ -álgebra que contém \mathcal{C} , isto é, mostre que existe uma σ -álgebra \mathcal{A} de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$;

(b) Se \mathcal{D} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ então $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

2. Seja X um conjunto não enumerável. Mostre que

$$\mathcal{A} \doteq \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ ou } X \setminus A \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Defina $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ pela regra $\mu(A) = 0$ se A é enumerável, $\mu(A) = 1$ se $X \setminus A$ é enumerável. Mostre que μ é uma medida.

3. Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade: existe A denso em \mathbb{R} tal que $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in A$. Mostre que f é \mathcal{A} -mensurável.

4. Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, uma sequência de funções \mathcal{A} -mensuráveis. Mostre que o conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existe o limite da sequência $\{f_n(x)\}$ é \mathcal{A} -mensurável.

5. Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{A} -mensurável. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existem $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ e $M > 0$ tais que $\mu(X \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ e $|f(x)| \leq M$ para $x \in A_\epsilon$. A hipótese $\mu(X) < \infty$ é essencial?

6. Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, uma sequência de funções \mathcal{A} -mensuráveis. Suponha que exista $\lim_n f_n(x)$ para todo $x \in X$ e seja $f \doteq \lim f_n$. Mostre que para todo $\delta > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < \delta$ tal que f_n converge *uniformemente* para f em $X \setminus A$.

7. Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e seja ν_{x_0} a medida de Dirac em \mathcal{A} concentrada em $x_0 \in X$. Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada determine $\int_X f d\nu_{x_0}$.

8. Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $g : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada. Considere a medida finita

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu(x) \quad A \in \mathcal{A}.$$

Mostre que se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{A} -mensurável e limitada então

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x).$$

9. Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $f : X \rightarrow [0, \infty[$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada. Mostre que se $\int_X f(x)d\mu(x) = 0$ então $f = 0$ μ -q.s.

10. Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $\epsilon > 0$ e $f : X \rightarrow [\epsilon, \infty[$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada. Mostre que

$$\int_X \log f d\mu \leq \log \int_X f d\mu.$$

Sugestão: Mostre primeiramente que $\log t \leq t - 1$ para $0 < t < \infty$. A seguir substitua t or $f(x)/\int_X f d\mu$ e integre.

11. Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $\epsilon > 0$ e $f : X \rightarrow [\epsilon, \infty[$ uma função \mathcal{A} -mensurável e limitada. Mostre que

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{1/p} = \exp \left\{ \int_X \log f d\mu \right\}.$$

Sugestão: $\lim_{t \rightarrow 0^+} (a^t - 1)/t = ?$

12. Seja (G, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida finita. Suponha que sobre G esteja definida uma estrutura de grupo $(g, h) \mapsto g \cdot h$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $g \in G$ e $A \in \mathcal{B}$ então $g \cdot A \doteq \{g \cdot h : h \in A\} \in \mathcal{B}$ e $\mu(g \cdot A) = \mu(A)$. Seja ainda $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{B} -mensurável e limitada. Mostre que para todo $g \in G$ vale

$$\int_G f(g \cdot h) d\mu(h) = \int_G f(h) d\mu(h).$$

13. Sejam (Y, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Considere uma função $f : U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade:

para todo $x \in U$ a função $y \mapsto f(x, y)$ é \mathcal{A} -mensurável e limitada.

Esta propriedade permite definir $F : U \mapsto \mathbb{R}$ pela fórmula

$$F(x) = \int_Y f(x, y) d\mu(y).$$

(a) Suponha ainda que, para todo $y \in Y$, a função $x \mapsto f(x, y)$ seja contínua em U e que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ quando $(x, y) \in U \times Y$. Mostre que então F é contínua.

(b) Suponha agora que, para todo $y \in Y$, a função $x \mapsto f(x, y)$ seja de classe C^1 em U e que exista um constante $M_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq M_1, \quad (x, y) \in U \times Y, \quad j = 1, \dots, N.$$

Mostre que F é de classe C^1 em U e que

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) d\mu(y), \quad x \in U, \quad j = 1, \dots, N.$$

(c) Determine uma condição suficiente para que F seja de classe C^k em U , $k = 2, \dots, \infty$.

14. Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida finita e seja \mathcal{F} o conjunto de todas as funções \mathcal{A} -mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Para $f, g \in \mathcal{F}$ defina

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

Mostre as seguintes afirmações:

(a) $d(f, g) = 0$ se, e só se, $f = g$ μ -q.s.

(b) $d(f, g) = d(g, f)$.

(c) $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

(d) Se $f_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$, e se $f \in \mathcal{F}$ então $d(f_n, f) \rightarrow 0$ se, e só se, para todo $\delta > 0$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) = 0.$$

(e) Se $f_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$, é tal que $d(f_m, f_n) \rightarrow 0$ então existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $d(f_n, f) \rightarrow 0$;

Capítulo 2

1. Demonstre que a classe de todos os subconjuntos A de \mathbb{R}^N tais que $\mathbf{m}^*(A) = 0$ ou $\mathbf{m}^*(\mathbb{R}^N \setminus A) = 0$ forma uma σ -álgebra.

2. Sejam A, B subconjuntos de \mathbb{R}^N , com $\mathbf{m}^*(A) = 0$. Mostre que $\mathbf{m}^*(A \cup B) = \mathbf{m}^*(B)$.

3. Seja A um subconjunto enumerável de \mathbb{R}^N . Mostre que $\mathbf{m}^*(A) = 0$.

4. Sejam A um subconjunto de \mathbb{R}^N , $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina $y + A \doteq \{y + x : x \in A\}$ e $\lambda A \doteq \{\lambda x : x \in A\}$. Mostre que:

(a) $\mathbf{m}^*(y + A) = \mathbf{m}^*(A)$;

(b) $\mathbf{m}^*(\lambda A) = |\lambda|^N \mathbf{m}^*(A)$.

5. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^N$ é Lebesgue-mensurável e se $y \in \mathbb{R}^N$ então $y + A$ é Lebesgue-mensurável e que $\mathbf{m}(y + A) = \mathbf{m}(A)$. Mostre ainda que se $\lambda \in \mathbb{R}$ então λA é também Lebesgue-mensurável e que $\mathbf{m}(\lambda A) = |\lambda|^N \mathbf{m}(A)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue mensurável e suponha que exista $\partial f / \partial x_1$ em todo ponto de \mathbb{R}^N . Mostre que $\partial f / \partial x_1$ é também Lebesgue mensurável.

7. Sejam $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ com $\mathbf{m}(X) < \infty$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $f : y + X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{M}(y + X)$ -mensurável e limitada. Mostre que $x \mapsto f(y + x)$ é $\mathcal{M}(X)$ -mensurável e que

$$\int_X f(y + x) d\mathbf{m}(x) = \int_{y+X} f(x) d\mathbf{m}(x).$$

8. Sejam $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ com $\mathbf{m}(X) < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \lambda X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{M}(\lambda X)$ -mensurável e limitada. Mostre que $x \mapsto f(\lambda x)$ é $\mathcal{M}(X)$ -mensurável e que

$$|\lambda|^N \int_X f(\lambda x) d\mathbf{m}(x) = \int_{\lambda X} f(x) d\mathbf{m}(x).$$

9. Sejam $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em $A \cup B$. Mostre que f é $\mathcal{M}(A \cup B)$ -mensurável se, e somente se, $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{M}(A)$ -mensurável e $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{M}(B)$ -mensurável.

10. Sejam $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{M}(X)$ -mensurável. Mostre que $f^{-1}[U] \in \mathcal{M}(X)$, qualquer que seja o aberto $U \subset \mathbb{R}$.

11. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mensurável e limitada sobre os compactos de Ω . Sejam $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tais que $\{x : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$ e considere uma sequência de conjuntos Lebesgue-mensuráveis X_j satisfazendo $\mathbf{m}(X_j) > 0$ e $X_j \subset \{x : |x - x_0| \leq r/j\}$. Mostre que se f é contínua em x_0 então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{m}(X_j)} \int_{X_j} f(x) d\mathbf{m}(x) = f(x_0).$$

12. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ uma função Lebesgue-mensurável, que é limitada sobre os subconjuntos compactos de Ω . Suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que $\int_K f(x) d\mathbf{m}(x) \leq C$ para todo $K \subset \Omega$ compacto. Seja $\{K_j\}$ uma sequência de subconjuntos compactos de Ω satisfazendo $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$. Mostre que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f(x) d\mathbf{m}(x) = \sup \left\{ \int_K f(x) d\mathbf{m}(x) : K \subset \Omega, K \text{ compacto} \right\}.$$

13. Seja $[a, b]$, $a < b$, um intervalo compacto de \mathbb{R} e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue mensurável e limitada. Suponha que $\int_{[a,x]} f(t) d\mathbf{m}(t) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que $f = 0$ m-q.s. em $[a, b]$

14. Caso você não conheça, procure e estude em algum texto a construção do conjunto de Cantor em \mathbb{R} (o livro de Hewitt–Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Graduate Texts in Mathematics no. 25, Springer-Verlag, 1965 é uma referência). Mostre que o conjunto de Cantor é $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ -mensurável, não-enumerável e de medida zero.

15. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Defina

$$g(x) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_N), \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in I.$$

Mostre que

$$\int_{[0,1]^N} g(x) d\mathbf{m}(x) = \left[\int_{[0,1]} f(t) d\mathbf{m}(t) \right]^N.$$

16. Uma medida μ definida sobre os conjuntos Lebesgue mensuráveis de \mathbb{R}^N satisfaz a propriedade (\star) se $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K de \mathbb{R}^N e se existe uma constante $C > 1$ tal que

$$\mu(B[x, 2\delta]) \leq C\mu(B[x, \delta]), \quad x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0.$$

Aqui $B[x, \delta] = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| \leq \delta\}$. Mostre que

- (a) A medida de Lebesgue \mathbf{m} satisfaz a propriedade (\star) .
- (b) Se μ satisfaz (\star) e não se anula identicamente então $\mu(\mathbb{R}^N) = \infty$.
- (c) Se μ satisfaz (\star) e se $x \in \mathbb{R}^N$ então $\mu(\{x\}) = 0$.

Sugestão para (c): Dado $v \in \mathbb{R}^N$ com $|v| = 1$ tem-se

$$\mu(\{x\}) + \mu(B[x + \delta v/2, \delta/4]) \leq \mu(B[x, \delta]).$$

Capítulo 3

1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Mostre que dados um intervalo $I \subset\subset \Omega$ e $\epsilon > 0$ existem cubos compactos $I_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, n$, tais que $I \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$ e $\sum_{j=1}^n \text{Vol}(I_j) \leq \text{Vol}(I) + \epsilon$.
2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $E \subset\subset \Omega$ com $\mathbf{m}(E^*) = 0$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe uma sequência de cubos compactos $I_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $E \subset \bigcup_n I_n$ e $\sum_n \text{Vol}(I_n) < \epsilon$.
3. Defina $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pela regra

$$F(x, y) = (\mathbf{e}^x \cos y - 1, \mathbf{e}^x \text{sen } y).$$

Mostre que $F = G_2 \circ G_1$ em uma vizinhança da origem, onde

$$G_1(x, y) = (\mathbf{e}^x \cos y - 1, y), \quad G_2(u, v) = (u, (1 + u) \tan v).$$

Determine $F'(0, 0)$, $G_1'(0, 0)$ e $G_2'(0, 0)$. Defina ainda

$$H_1(x, y) = (x, \mathbf{e}^x \text{sen } y)$$

e determine

$$H_2(u, v) = (h(u, v), v)$$

de tal modo que $F = H_2 \circ H_1$ em uma vizinhança da origem. Compare o resultado obtido com a Proposição 3.1.

4. Defina $(x, y) = T(r, \theta)$ no retângulo

$$R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \text{sen } \theta.$$

Mostre T aplica R sobre o disco fechado D de centro na origem e raio a , que T é injetora no interior de R e que $\det T'(r, \theta) = r$. Mostre também que se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável e limitada então

$$\int_D f = \int_R f(T(r, \theta)) r \, dr d\theta.$$

Observação: note que o Teorema de Mudança de Variáveis não se aplica diretamente...

5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ um difeomorfismo de classe C^1 . Mostre que se $F \subset \Omega$ é tal que $\mathbf{m}^*(F) = 0$ então $\mathbf{m}^*(f(F)) = 0$.
6. Sejam I um intervalo aberto de \mathbb{R} e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Defina $\Omega = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y + g(x))$.

- (a) Mostre que f é um difeomorfismo de classe C^1 de Ω sobre si mesmo.
- (b) Mostre que se $E \subset \subset \Omega$ é Lebesgue-mensurável então $\mathbf{m}(f(E)) = \mathbf{m}(E)$.
- (c) Mostre que o gráfico de g , que é por definição o conjunto $\{(x, g(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$, tem medida nula.
- (d) Mostre que se $r > 0$ então o círculo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ tem medida de Lebesgue nula.

7. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada $a = (a_1, \dots, a_N) \in \Omega$ e cada $r > 0$ defina

$$I[a, r] = [a_1 - r/2, a_1 + r/2] \times \dots \times [a_N - r/2, a_N + r/2].$$

Mostre que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{m}(f(I[a, r]))}{r^N} = |\det f'(a)|.$$

8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^2 e $a = (a_1, \dots, a_N) \in \Omega$. Suponha que $f'(a) = 0$. Seguindo a notação do exercício anterior, mostre que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{m}(f(I[a, r]))}{r^N} = 0.$$

Sugestão: Mostre, primeiramente, que existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| \leq C|x - a|^2$, $x \in I[a, r]$ e conclua que $\text{diam}(f(I[a, r])) \leq CNr^2/2$.

9. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que $f(B) \subset B$, onde $B = \{x : |x| \leq 1\}$. Suponha ainda que $|\det f'(x)| < 1$ para todo $x \in B$. Determine, para $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f^n(B)} g(x) \, d\mathbf{m}(x);$$

Aqui $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n fatores).

Para os próximos dois exercícios adotaremos a seguinte definição.

Definição. Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty[$ é Lebesgue-mensurável e limitada sobre os conjuntos limitados de \mathbb{R}^N , definimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, d\mathbf{m}(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(x) \, d\mathbf{m}(x),$$

onde $I_R = [-R, R]^N$.

Note que este limite sempre existe e que seu valor pertence a $[0, \infty]$.

10. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, d\mathbf{m}(x) = \sqrt{\pi}.$$

Sugestão: Inicie observando que

$$\left\{ \int_{[-R, R]} e^{-x^2} \, d\mathbf{m}(x) \right\}^2 = \int_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} \, d\mathbf{m}(x, y).$$

11. Uma transformação linear $A \in L(\mathbb{R}^N)$ é *definida positiva* se $\langle Ax, x \rangle > 0$ para $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$. Mostre que se A é definida positiva e simétrica então

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\langle Ax, x \rangle} dm(x) = \left(\frac{\pi^N}{\det A} \right)^{1/2}.$$

Sugestão: Lembre-se que se A é definida positiva e simétrica então $\det A > 0$ e que, de acordo com um resultado de Álgebra Linear, existe $B \in L(\mathbb{R}^N)$, com $B^*B = I$, tal que B^*AB é diagonalizável.

Capítulo 4

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $K \subset \Omega$ compacto. Mostre que se $f \in C^\infty(\Omega)$ então existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $F = f$ em K .

2. Seja ρ_ϵ como definida no início do Capítulo IV. Seja também $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a seguinte propriedade: existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ tal que $u(x) = 0$ se $x \notin K$. Defina

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) \rho_\epsilon(y) dm(y).$$

Mostre as seguintes afirmações:

- (a) $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;
- (b) Existe um compacto $K_0 \subset \mathbb{R}^N$ tal que $u_\epsilon(x) = 0$ se $x \notin K_0$ e $0 < \epsilon \leq 1$;
- (c) $u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} u$ uniformemente em \mathbb{R}^N .

3. Mostre que se I, J e K são multi-índices ordenados de comprimento p, q e r respectivamente, formados por elementos de $\{1, \dots, N\}$, então

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^{pq} dx_J \wedge dx_I, \quad (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K).$$

4. Mostre que se ω é uma k -forma definida sobre um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N , e se k é ímpar, então $\omega \wedge \omega = 0$. Dê um exemplo de uma forma diferencial $\beta \in \mathbf{F}_2(\mathbb{R}^4)$ satisfazendo $\beta \wedge \beta \neq 0$.

5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\alpha \in \mathbf{F}_1(\Omega)$. Mostre que

$$d\alpha(L, M) = L(\alpha(M)) - M(\alpha(L)) - \alpha([L, M]), \quad L, M \in \mathbf{X}(\Omega).$$

6. Mostre que se α, β são formas fechadas então $\alpha \wedge \beta$ também é fechada. Mostre que, se em adição, β é exata então $\alpha \wedge \beta$ também é exata.

7. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - \sin x_2, e^{x_3})$, e $\omega = (\log y_2) dy_1 \wedge dy_2 \in \mathbf{F}_2(U)$, onde $U = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}$. Determine ω_F .

8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 \in \mathbf{F}_1(\Omega)$. Defina

$$L = \omega_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \omega_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathbf{X}(\Omega).$$

Mostre que existe $f \in C^\infty(\Omega)$, $f > 0$ em Ω , satisfazendo $d(f\omega) = 0$ se, e somente se, existe $u \in C^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$Lu = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}.$$

9. Sejam Ω e U abertos de \mathbb{R}^N e $F : \Omega \rightarrow U$ um difeomorfismo de classe C^∞ . Dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ defina $F_*(L) : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ pela regra

$$F_*(L)(g) \doteq L(g \circ F) \circ F^{-1}, \quad g \in C^\infty(U).$$

Mostre que $F_*(L) \in \mathfrak{X}(U)$ e que $F_* : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$ é \mathbb{R} -linear.

10. Defina $\pi : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\pi(x_1, \dots, x_N, x_{N+1}) = (x_1, \dots, x_N)$. Sejam $\omega \in \mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $f \neq 0$ em todo ponto. Defina $\alpha \in \mathfrak{F}_1(\mathbb{R}^{N+1})$ pela fórmula

$$\alpha \doteq \omega_\pi - \frac{1}{f \circ \pi} dx_{N+1}.$$

Mostre que $d(f\omega) = 0$ se, e somente se, $\alpha \wedge d\alpha = (\omega \wedge d\omega)_\pi$.

11. Considere a demonstração do Lema de Poincaré. Determine explicitamente a expressão dos coeficientes da forma α em termos dos coeficientes da forma ω .

Capítulo 5

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\sigma \in \mathfrak{c}_0(\Omega) = \mathfrak{C}_0(\Omega)$ tal que $\int_\sigma \omega = 0$, $\forall \omega \in \mathfrak{F}_0(\Omega)$. Mostre que $\sigma = 0$.

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Mostre que se $\omega \in \mathfrak{F}_k(\Omega)$ é tal que $\int_\sigma \omega = 0$, $\forall \sigma \in \mathfrak{s}_k(\Omega)$, então $\omega = 0$.

3. Sejam $k \geq 2$ e $\Gamma \in \mathfrak{c}_k(\Omega)$ (Ω aberto de \mathbb{R}^N). Mostre que $\partial(\partial\Gamma) = 0$.

4. Sejam $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^N$.

(a) Calcule $\partial\sigma$, onde $\sigma = [p_0, p_0, p_0]$.

(b) Seja $\alpha = [p_0, p_1] + [p_1, p_0]$. Determine $\Gamma \in \mathfrak{c}_2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\partial\Gamma = \alpha$.

5. Dada

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$$

determine $\int_\sigma \omega$, onde $\sigma = [e_1 + 2e_3, 2e_2, e_2 - e_1]$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 .

6. Sejam $\beta \in \mathfrak{F}_2(\mathbb{R}^2)$ e $\vartheta = [0, e_1, e_2] + [e_1 + e_2, e_2, e_1] \in \mathfrak{c}_2(\mathbb{R}^2)$. Mostre que

$$\int_\vartheta \beta = \int_I \beta,$$

onde $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Aqui $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 .

7. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^N . Mostre que se $k \geq 1$ então $\partial : \mathfrak{C}_k(\Omega) \rightarrow \mathfrak{C}_{k-1}(\Omega)$ é uma extensão da aplicação $\partial : \mathfrak{c}_k(\Omega) \rightarrow \mathfrak{c}_{k-1}(\Omega)$. Mostre também que se $k \geq 2$, e se $\theta \in \mathfrak{C}_k(\Omega)$, então $\partial(\partial\theta) = 0$.

Sugestão. Para esta última parte note que se $\tau_j^k = [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$, onde $e_0 = 0$, então $\tau_j^{(k)} \circ \tau_\ell^{(k-1)} = \tau_{\ell+1}^{(k)} \circ \tau_j^{(k-1)}$.

8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $D : F_{N-1}(\Omega) \rightarrow F_N(\Omega)$ um operador linear que satisfaz

$$\int_{\Theta} D\omega = \int_{\partial\Theta} \omega, \quad \forall \Theta \in C_N(\Omega).$$

Mostre que $D = d$, o operador derivada exterior.

Capítulo 6

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\omega \in F_1(\Omega)$, $\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j(x) dx_j$ e suponha que $\sum_{j=1}^N |\omega_j(x)| \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Seja também $\theta \in F_1(\Omega)$ satisfazendo $\theta \wedge \omega = 0$.

(a) Mostre que dado $x_0 \in \Omega$ existem $V_0 \subset \Omega$ aberto contendo x_0 e $f \in C^\infty(V_0)$ tais que $\theta = f\omega$ em V_0 .

(b) Conclua que dado $K \subset \Omega$ compacto existe uma função g de classe C^∞ definida em um aberto U que contém K tal que $\theta = g\omega$ em U .

Sugestão para (b): utilizar a Proposição 6.2.

2. Suponha que os coeficientes de $\alpha \in F_{N-1}(\mathbb{R}^N)$ se anulam no complementar de um compacto K de \mathbb{R}^N . Mostre que $\int_K d\alpha = 0$.

3. Seja $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^2$ um aberto regular e sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 que contém $\bar{\Omega}$. Mostre que

$$\int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(x, y) \, dm(x, y) = \int_{\partial\Omega} f \, dg = - \int_{\partial\Omega} g \, df.$$

4. Seja $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ um aberto regular e seja $f = (f_1, \dots, f_N) : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^∞ , onde U é um aberto de \mathbb{R}^N que contém $\bar{\Omega}$. Suponha que, para algum $1 \leq j \leq N$ tem-se $f_j = 0$ em $\partial\Omega$. Mostre que

$$\int_{\bar{\Omega}} \det f'(x) \, dm(x) = 0.$$

5. Seja Ω um aberto regular em \mathbb{R}^N . Enuncie e demonstre uma fórmula para Ω que generalize a conhecida fórmula de integração por partes quando $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$.

6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto regular, $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\bar{\Omega} \subset U$, $\alpha \in F_p(U)$, $\beta \in F_{N-p-1}(U)$. Suponha que β seja fechada e que os coeficientes de α se anulam na fronteira de Ω . Mostre então que

$$\int_{\bar{\Omega}} (d\alpha) \wedge \beta = 0.$$

7. Demonstre a Proposição 6.3.

8. Sejam $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Escreva as coordenadas em \mathbb{R}^2 como (x, y) e seja $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Mostre que se $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ então

$$\int_{H_+} d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(x, 0) \, dm(x).$$

9. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira regular e \vec{n} o campo normal exterior a Ω . Para uma função u de classe C^∞ definida em uma vizinhança V de $\bar{\Omega}$ definimos

$$\Delta u(x) \doteq \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x), \quad x \in V \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \doteq \vec{\nabla} u(y) \cdot \vec{n}(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

Utilize o teorema da divergência para mostrar que se u, v são de classe C^∞ em V então

$$\int_{\bar{\Omega}} \left\{ u(x) \Delta v(x) + \vec{\nabla} u(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) \right\} dm(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) dm_{\partial\Omega}(y)$$

e que

$$\int_{\bar{\Omega}} \left\{ u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x) \right\} dm(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(y) - v(y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y) \right\} dm_{\partial\Omega}(y).$$

Conclua que se $\Delta u = 0$ em Ω e se $u = 0$ em $\partial\Omega$ então $u = 0$ em $\bar{\Omega}$.

10. Mostre os resultados abaixo:

(a) Seja $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal $\Omega \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x) < 0\}$ é limitado e $d\rho(x) \neq 0$ quando $\rho(x) = 0$. Então Ω é um aberto com fronteira regular.

(b) Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^N com fronteira regular. Então dado $x_0 \in \partial\Omega$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^N$ contendo x_0 e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$$g(x_0) = 0, \quad dg(x_0) \neq 0, \quad U \cap \Omega = \{x \in U : g(x) < 0\}.$$

(c) Todo aberto com fronteira regular é da forma descrita no item (a) para alguma função ρ . *Sugestão: utilizar partições da unidade.*

(d) Se $r > 0$ então $B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$ é um aberto com fronteira regular.

(e) Seja $L = \sum_{j=1}^N a_j(x) \partial/\partial x_j$ um campo vetorial definido em um aberto contendo \bar{B} . Seja também $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$. Então

$$\int_{\bar{B}} (\operatorname{div} L)(x) dm(x) = \int_{\partial B} \vec{a}(y) \cdot \frac{y}{|y|} dm_{\partial B}(y).$$

(f) Em particular

$$\mathbf{m}(B) = \frac{r}{N} \mathbf{m}_{\partial B}(\partial B).$$

(g) Seja $B_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$. Então

$$\mathbf{m}_{\partial B}(\partial B) = r^{N-1} \mathbf{m}_{\partial B_0}(\partial B_0).$$

Apêndice

1. Seja

$$\mathcal{E} : E_0 \xrightarrow{T_0} E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

um complexo finito de espaços vetoriais, todos eles de dimensão finita. Mostre que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \dim H^j(\mathcal{E}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim E_j.$$

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ aberto. Mostre que dada $f \in C^\infty(\Omega)$ existe $g \in C^\infty(\Omega)$ tal que $g' = f$. Conclua que $H^1(\Omega) = 0$.

3. Seja $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em \mathbb{R}^N que são periódicas (e de período 2π) em cada uma das variáveis. Considere a aplicação

$$D : C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \underbrace{C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N) \times \dots \times C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N)}_{N \text{ fatores}},$$

$$D(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right).$$

Seja também F o subespaço de $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N) \times \dots \times C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N)$ formado pelas N -plas (f_1, \dots, f_N) que satisfazem

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Mostre que F contém a imagem da aplicação D e determine o quociente de F pela imagem de D .

4. Seja $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Mostre que $H^2(\Omega) \neq 0$. Sugestão: Considere a 2-forma

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy)$$

e a 2-superfície

$$\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

5. Defina o operador de Laplace em \mathbb{R}^N pela expressão

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

É um resultado não elementar da teoria da equações diferenciais parciais lineares que, dado qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, então $\Delta : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ é sobrejetor. Use este resultado para mostrar que $H^N(\Omega) = 0$, qualquer que seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto.

6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e denote os pontos em $\Omega \times \mathbb{R}$ na forma $(x, t) = (x_1, \dots, x_N, t)$.

(a) Mostre que toda forma de grau k em $\Omega \times \mathbb{R}$ se escreve, de modo único, como $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$, onde $\alpha = \sum_I' \alpha_I(x, t) dx_I$ e $\beta = \sum_J' \beta_J(x, t) dx_J$ são formas de grau $k - 1$ e k respectivamente.

(b) Defina uma transformação $K : F_k(\Omega \times \mathbb{R}) \rightarrow F_{k-1}(\Omega)$ pela fórmula

$$K(\omega) = \sum_I \left(\int_0^1 \alpha_I(x, t) dt \right) dx_I.$$

Verifique que K está bem definida e que é \mathbb{R} -linear.

(c) Para cada $t \in \mathbb{R}$ defina $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ por $\theta_t(x) = (x, t)$. Mostre que se ω é uma k -forma em $\Omega \times \mathbb{R}$ então vale

$$K(d\omega) + d(K(\omega)) = (\omega)_{\theta_1} - (\omega)_{\theta_0}.$$

(d) Conclua que $\theta_0 : \Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ e $\theta_1 : \Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ induzem as mesmas transformações $H^n(\Omega \times \mathbb{R}) \rightarrow H^n(\Omega)$ para todo $n \geq 1$.

7. Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ abertos com $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$

(a) Mostre que dada $f \in C^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ existem $f_j \in C^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, tais que $f = f_1 - f_2$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Sugestão: aqui você pode utilizar uma versão mais geral do resultado sobre a existência de partições da unidade. Pesquise-a e enuncie-a precisamente.

(b) *Definição: uma seqüência de espaços vetoriais e aplicações lineares*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{T_1} E_2 \xrightarrow{T_2} E_3 \xrightarrow{T_3} E_4$$

é exata se $\ker T_1 = 0$ e $\ker T_j = \text{Im } T_{j-1}$, $j = 2, 3$. Sejam então U, V abertos de \mathbb{R}^N , $U \cap V \neq \emptyset$. Mostre que a seguinte seqüência é exata:

$$0 \longrightarrow H^0(U \cup V) \xrightarrow{T} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{S} H^0(U \cap V) \xrightarrow{R} H^1(U \cup V).$$

Aqui T , S e R são definidos do seguinte modo: considere as aplicações de inclusão

$$j_U : U \hookrightarrow U \cup V, \quad j_V : V \hookrightarrow U \cup V, \quad \iota_U : U \cap V \hookrightarrow U, \quad \iota_V : U \cap V \hookrightarrow V.$$

Então

$$T(\xi) = (j_U^*(\xi), j_V^*(\xi)), \quad S(\xi, \eta) = \iota_U^*(\xi) - \iota_V^*(\eta).$$

Para finalmente definir R proceda do seguinte modo: suponha que $\xi \in H^0(U \cap V)$ seja representada por $f \in C^\infty(U \cap V)$. Escreva $f = f_1 - f_2$ como em (1) e seja $\omega \in F_1(U \cup V)$ dada por $\omega = df_1$ em U , $\omega = df_2$ em V . Defina $R(\xi) = [\omega]$. Verifique primeiramente que R está bem definida, isto é, que o valor de $R(\xi)$ independe da escolha de f e da escolha de sua decomposição, e mostre também que R é linear.

(c) É possível decompor $\mathbb{R}^N = U \cup V$ com U e V abertos conexos e $U \cap V$ desconexo?

Índice Remissivo

- aberto regular, 58
- k -cadeia
 - afim, 53
 - fronteira de uma, 54
 - singular, 57
- campo normal unitário exterior, 67
- campo vetorial, 34
- colchete de Lie, 34
- complexo
 - exato, 69
- complexo de \mathbb{R} -espaços vetoriais, 69
- comprimento de um intervalo, 15
- comutador, 34
- conjunto
 - estrelado, 44
 - Lebesgue-mensurável, 17
 - mensurável, 3
- cubo, 25
- derivada exterior, 40
- desigualdade do valor médio, 24
- difeomorfismo de classe C^1 , 23
- diferencial, 36
- espaço de medida, 4
 - completo, 6
 - finita, 7
- espaço mensurável, 3
- espaços de cohomologia, 69
- espaços de cohomologia de De Rham, 70
- fórmula de Gauss, 60
- fórmula de Green, 59
- fórmula de Stokes, 59
- 0-forma, 35
- 1-forma, 35
- k -forma, 37
 - fechada, 42
 - representação canônica de uma, 38
- função
 - característica, 6
 - escada, 21
 - mensurável, 5
 - quase-nula, 53
 - Riemann integrável, 21
 - simples, 6
 - sinal, 39
- hipersuperfície regular parametrizada, 61
- integral, 7, 9
 - de Lebesgue, 20
 - de N -formas, 49
 - de Riemann, 21
- intervalo em \mathbb{R}^N , 15
- Lema de Poincaré, 44
- módulo, 45
 - base de um, 46
 - base dual de um, 47
 - dimensão de um, 46
 - livre, 46
- módulos isomorfos, 46
- medida, 3
 - de contagem, 3
 - de Dirac, 4
 - de superfície, 61
 - exterior, 15
 - induzida, 4
- μ -quase sempre, 10
- multi-índice, 37
- operador de fronteira, 58
- parametrização positiva, 58
- partição da unidade, 64
- partição de um intervalo, 21
- produto exterior, 38
- pullback, 42
- regra de Leibniz, 34

representação canônica de uma função simples, 7

σ -álgebra, 3

k -simplexo

afim, 51

singular, 57

standard, 49

subespaço mensurável, 3

k -superfície, 49

Teorema de Mudança de Variável, 23

Teorema de Stokes, 55, 58

volume de um intervalo, 15