MAT 0554 - Panorama de Matemática / 2o. semestre de 2017

Lista de exercícios

1. Se $T \in \mathcal{D}'$ definimos o *suporte de* T, e denotamos por $\operatorname{supp} T$, como sendo o menor subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ para o qual T se anula em seu complementar. Determine

$$\operatorname{supp} \delta,\ \operatorname{supp} \{H\},\ \operatorname{supp} \mathrm{VP} \left\{ \frac{1}{x} \right\}.$$

Mostre também que se $f \in C(\mathbb{R})$ então

$$\operatorname{supp} \{f\} = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

2. Seja $\{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável e sem pontos de acumulação. Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ e defina

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ T[\phi] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi^{(j)}(x_j),\ \phi \in \mathcal{D}.$$

Mostre que $T \in \mathcal{D}'$ e determine seu suporte.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e defina f_+ (resp. f_-) como sendo a restrição de f a $]0, \infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$). Suponha que:

1. f_+ e f_- são de classe C^1;
2. f_+ se estende continuamente a $[0, \infty[$;
3. f_- se estende continuamente a $]-\infty, 0]$;
4. f'_+, f'_- são limitadas.

Tome f' como sendo igual a f'_+ em $]0, \infty[$, igual a f'_- em $]-\infty, 0[$) e arbitrariamente definida em 0. Mostre que $f, f' \in \mathcal{L}$ e que vale a fórmula

$$\{f\}' = \{f'\} + \left[f(0^+) - f(0^-) \right] \delta.$$

4. Mostre que existe $\theta \in \mathcal{D}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\theta \geq 0,\ \theta(x) = 0 \text{ se } |x| \geq 3,\ \theta(x) = 1 \text{ se } |x| \leq 1.$$

Sugestão. Tome $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \geq 0$, $\psi(x) = 0$ se $|x| \geq 1$ e com integral sobre $\mathbb{R}$ igual a um. Defina

$$\theta(x) = \int_{|y| \leq 2} \psi(x - y) \mathrm{d}y.$$

5. Seja $T \in \mathcal{D}'$ tal que $xT = 0$. Siga os passos abaixo para mostrar que $T = c\delta$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

- Mostre primeiramente que $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$.
- Dada $\phi \in \mathcal{D}$ escreva $\phi(x) = \phi(0) + xg(x)$, com $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- Aplique T na função teste $\theta\phi$, onde θ é a função construída no exercício 4.

- - - - o o o - - - -