MAT 0554 - Panorama de Matemática / 2o. semestre de 2017

As noções de convergência e derivada no sentido fraco e aplicações.

Paulo D. Cordaro (IME-USP)

Introdução

Iniciamos recordando que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* no ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se existir o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (\doteq f'(x_0))$$

Se f é diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0, isto é

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Exemplo: $g(x) = |x|$ é diferenciável em todo ponto $x_0 \neq 0$ mas não é diferenciável em $x_0 = 0$, embora seja contínua também em $x_0 = 0$.

Exemplo: A função de Heaviside é definida como:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$H(x)$ é diferenciável em todo ponto $x_0 \neq 0$ mas não é contínua em $x_0 = 0$.

Em aplicações na Física e na Engenharia, por exemplo, é importante dar um significado para a derivada da função de Heaviside. Este "objeto" deve ser identicamente zero fora da origem e deve, também, detectar o salto de uma unidade quando os valores de x passam de negativos a positivos. As técnicas usuais do Cálculo Diferencial não são suficientes para resolver esta questão.

Funções teste

Denotaremos por $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis e que se anulam no complementar de um intervalo $[a, b]$.

$\mathcal{D}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão infinita. Para verificar este fato notemos primeiramente que segue do teorema de L'Hôpital que a função definida como 0 para $x \leq 0$, $\exp\{-1/x\}$ para $x > 0$ é de fato infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exemplo. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definimos

$$\alpha_a(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-a)} & \text{se } x > a \\ 0 & \text{se } x \leq a. \end{cases} \quad \beta_b(x) = \begin{cases} e^{-1/(b-x)} & \text{se } x < b \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Então $\eta_{a,b}(x) \doteq \alpha_a(x) \cdot \beta_b(x)$ pertence a $\mathcal{D}$.

A ideia central

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica, por definição, caracterizada pelos valores $f(x)$, quando x percorre $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{L}$ a classe[1] de todas as funções que são integráveis e absolutamente integráveis, no sentido impróprio de Riemann, em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Note que $C(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$. Se $f \in \mathcal{L}$ definimos

$$\{f\}[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Questão fundamental: Os valores $\{f\}[\phi]$ caracterizam f ?

A resposta **SIM**: *a função f pode ser determinada pelas médias ponderadas* $\{f\}[\phi]$.

Em outras palavras, o funcional linear

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \{f\}[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

determina f.

Vamos demonstrar este fato assumindo, por simplicidade, que f é contínua (o resultado é verdadeiro em geral). Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}$ e seja $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \geq 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}$ por

$$\psi_\varepsilon(x) \doteq \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right).$$

Então

$$\{f\}[\psi_\varepsilon] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + \varepsilon y)\psi(y)\mathrm{d}y \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x_0).$$

A validade do limite assim se justifica: tome $M > 0$ tal que $\psi = 0$ no complementar de $[-M, M]$. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + \varepsilon y)\psi(y)\mathrm{d}y - f(x_0) = \int_{-M}^{M} \left[f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0)\right]\psi(y)\mathrm{d}y$$

e portanto

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + \varepsilon y)\psi(y)\mathrm{d}y - f(x_0)\right| \leq \sup_{|y| \leq M} \left|f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0)\right|.$$

[1]Utilizando a integral de Lebesque podemos definir $\mathcal{L}$ como a classe de todas as funções mensuráveis $f : R \to [-\infty, \infty]$ tais que f é integrável em cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Dado $\rho > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|x - x_0| \leq \varepsilon_0$ implica $|f(x) - f(x_0)| \leq \rho$. Logo se $|y| \leq M$ e $\varepsilon < \varepsilon_0/M$ então $|f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0)| \leq \rho$. Consequentemente

$$\varepsilon < \varepsilon_0/M \implies \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + \varepsilon y)\psi(y)\mathrm{d}y - f(x_0) \right| \leq \rho. \qquad \square$$

O espaço $\mathcal{D}'$

Definição. Seja $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$. Escrevemos $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ se

1. Existe $M > 0$ tal que $\phi_n(x) = 0$ se $|x| > M$ e $n \in \mathbb{N}$.

2. $\phi_n^{(k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em $\mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Definição. Denotamos por $\mathcal{D}'$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de todos os funcionais lineares $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a seguinte propriedade:

- $\forall \{\phi_n\} \subset \mathcal{D},\ \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies T[\phi_n] \to 0.$

Dada $f \in \mathcal{L}$ podemos definir

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \{f\}[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Note que se $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ então $\{f\}[\phi_n] \to 0$ já que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \right| \leq \sup_{|x|\leq M} |\phi_n(x)| \int_{-M}^{M} |f(x)|\mathrm{d}x \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Tal associação nos fornece uma injeção

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

Idéia central: Desenvolver um cálculo diferencial em $\mathcal{D}'$ que coincida com o cálculo usual quando restrito a $C^1(\mathbb{R})$, através da identificação

$$C^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{D}'.$$

- A definição do espaço $\mathcal{D}'$ (seus elementos são denominados *distribuições sobre* $\mathbb{R}$) é devida a Laurent Schwartz (1915-2002). Schwartz recebeu a Medalha Fields em 1950 por seu trablaho sobre a teoria das distribuições.

O cálculo da derivada

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{D}$ podemos efetuar integração por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\{f(x)\phi(x)\}_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

Escrito de outro modo, uma vez que também temos $f' \in \mathcal{L}$,

$$\{f'\}[\phi] = -\{f\}[\phi'].$$

Definição fundamental. Se $T \in \mathcal{D}'$ definimos sua derivada $T' \in \mathcal{D}'$ pela regra

$$T'[\phi] = -T[\phi'], \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Uma vez que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ implica $\phi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ segue que T' define, de fato, um elemento de $\mathcal{D}'$.

Exemplo (a função de Heaviside): Como vimos podemos associar à funçao de Heaviside o seguinte funcional $\in \mathcal{D}'$:

$$\{H\}[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x.$$

Assim a derivada de H, como elemento de $\mathcal{D}'$ é o funcional

$$\{H\}'[\phi] = -\{H\}[\phi'] = -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(0),$$

isto é, a derivada de $\{H\}$ é igual ao funcional $\phi \mapsto \phi(0)$.

A "função" Delta de Dirac

- Paul A. M. Dirac (1902-1984), físico inglês, prêmio Nobel de Física (1933), o primeiro a afirmar categoricamente a existência de antipartículas.

Em um de seus trabalhos Dirac idealizou um "função", denominada $\delta(x)$, que teria as seguintes propriedades:

$$\delta(x) = 0, \quad \forall x \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0), \;\; \phi \in \mathcal{D}.$$

Assim $\delta(x)$ seria a representação de um pico concentrado na origem.

O modo correto de interpretamos a "função" $\delta(x)$ é considerá-la como o elemento $\delta \in \mathcal{D}'$ definido por

$$\delta[\phi] = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{D}'.$$

Vale então a conhecida fórmula:

$$\{H\}' = \delta.$$

A função $\log|x|$

A função $\log|x|$ pertence a $\mathcal{L}$ e portanto podemos considerar sua derivada

$$\{\log|x|\}' \in \mathcal{D}'$$

$$\begin{aligned}
\{\log|x|\}'[\phi] &= -(\log|x|)[\phi] \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \log|x|\,\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon} \log|x|\,\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{(\log\varepsilon)\left[\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)\right]+\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{(\log\varepsilon)\left[\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)\right]\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{(\log\varepsilon)\,\varepsilon\int_{-1}^{1}\phi'(\varepsilon y)\,\mathrm{d}y\right\} = 0.$$

Defina

$$\mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\}[\phi] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \phi\in\mathcal{D}\,.$$

Note que $\mathrm{VP}\{1/x\}\in\mathcal{D}'$ já que, se $\phi\in\mathcal{D}$ se anula no complementar de $[-M,M]$ temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon<|x|<M}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$$

e que

$$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} = \frac{\int_0^x\phi'(s)\mathrm{d}s}{x} = \int_0^1\phi'(sx)\mathrm{d}s$$

de onde segue que

$$\mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\}[\phi] = \int_{-M}^{M}\int_0^1\phi'(sx)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x.$$

Suponha então que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ e que todas ϕ_n se anulem no complementar de $[-M,M]$. Então

$$\left|\mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\}[\phi_n]\right| \leq 2M\sup|\phi_n'| \longrightarrow 0$$

o que mostra que de fato VP $\{1/x\} \in \mathcal{D}'$.

Resumindo, vale a seguinte fórmula em $\mathcal{D}'$:

$$\{\log|x|\}' = \mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

Propriedades da derivada

Proposição. Se $T \in \mathcal{D}'$ é tal que $T' = 0$ então T é definida por uma constante.

Demonstração. Temos $T[\phi'] = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$. Fixemos $\psi_0 \in \mathcal{D}$ com

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Então, se $\psi \in \mathcal{D}$ a função

$$\psi_\star(x) = \psi(x) - \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\mathrm{d}y\right\}\psi_0(x)$$

satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\star(x)\mathrm{d}x = 0$$

donde

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi_\star(y)\mathrm{d}y$$

é uma primitiva de $\psi_\star$ e pertence a $\mathcal{D}$. Assim

$$0 = T[\phi'] = T[\psi_\star] = T[\psi] - \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\mathrm{d}y\right\} T[\psi_0].$$

Logo

$$T[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} T[\psi_0]\,\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

e portanto T é definida pela função constante $T[\psi_0]$. $\square$

Corolário. Se u e f são funções contínuas em $\mathbb{R}$ e se $\{u\}' = \{f\}$ então u é continuamente diferenciável e sua derivada no sentido clássico é igual a f.

Demonstração. Defina

$$v(x) = \int_{0}^{x} v(y)\,\mathrm{d}y.$$

Então v é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e sua derivada (no sentido clássico) é f. Então, como antes por integração por partes, $\{v\}' = \{f\}$. Mas então $(\{u\} - \{v\})' = 0$ e portanto

$\{u - v\} = \{u\} - \{v\}$ é definida por uma constante, isto é, $u = v + c$ igualdade esta como funções contínuas. $\square$

Observação. Se $T \in \mathcal{D}'$ então ficam definidas todas as suas derivadas $T^{(k)} \in \mathcal{D}'$, $k \in \mathbb{N}$. Note que

$$T^{(k)}[\phi] = (-1)^k T[\phi^{(k)}], \ \ \phi \in \mathcal{D}.$$

Localização

Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e $T \in \mathcal{D}'$. Dizemos que T se *anula em* U se $T[\phi] = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$ que se anula fora de um intervalo compacto contido em U.

Proposição. Se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto então $\{f\}$ se anula em U se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: É simples ver que se $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $\{f\}$ se anula em U. Para a recíproca suponha que $\{f\}$ se anula em U e suponha que, por contradição, exista $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Podemos assumir que $f(x_0) > 0$. Por continuidade existe $r > 0$ tal que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset U$ e que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas então

$$\{f\}\left[\eta_{x_0 - r, x_0 + r}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{x_0 - r, x_0 + r}(x) f(x) \mathrm{d}x > 0,$$

uma contradição. $\square$

Exemplo: O delta de Dirac δ se anula em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Multiplicação por funções infinitamente diferenciáveis

Sejam $f \in \mathcal{L}$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{D}$. Então $gf \in \mathcal{L}$, $g\phi \in \mathcal{D}$ e temos

$$\{gf\}[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} (gf)(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g\phi)(x)\mathrm{d}x = \{f\}[g\phi].$$

Isto nos leva então à seguinte definição:

Definição. Se $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{D}'$ definimos

$$(gT)[\phi] = T[g\phi], \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Como $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ implica $(g\phi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ segue que gT pertence de fato a $\mathcal{D}'$. Com esta definição $\mathcal{D}'$ torna-se um módulo sobre o anel $C^\infty(\mathbb{R})$.

Vale a **regra de Leibniz**: se $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{D}'$ então

$$(gT)' = g'T + gT'.$$

Esta igualdade segue da validade da fórmula de Leibniz para funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. De fato, se $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
(gT)'[\phi] &= -(gT)[\phi'] \\
&= -T[g\phi'] \\
&= -T[(g\phi)' - g'\phi] \\
&= -T[(g\phi)'] + T[g'\phi] \\
&= -T[(g\phi)'] + (g'T)[\phi] \\
&= T'[g\phi] + (g'T)[\phi] \\
&= (gT')[\phi] + (g'T)[\phi],
\end{aligned}$$

o que demonstra nossa afirmação.

Proposição. Se $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e se $T \in \mathcal{D}'$ satisfaz a equação

$$T' + gT = 0$$

então T é definida por uma função infinitamente diferenciável.

Demonstração. Seja $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma primitiva de g. Então, pela regra de Leibniz,

$$(e^G T)' = e^G T' + (e^G)' T = e^G (T' + G'T) = e^G (T' + gT) = 0$$

e, portanto, $e^G T$ é definida por uma função constante. Logo $T = \left\{ce^{-G}\right\}$, onde c é uma constante. $\square$

Exemplos

É fácil ver que $x\delta = 0$. Logo, pela Regra de Leibniz, $(x\delta)' = x\delta' + \delta = 0$. Assim δ satisfaz à equação

$$xT' + T = 0. \tag{1}$$

Note também que $T = \mathrm{VP}\{1/x\}$ também satisfaz (1): isto segue do mesmo argumento, uma vez que $x\mathrm{VP}\{1/x\} = \{1\}$. Por outro lado observe que se f é uma função diferenciável e satisfaz (1) então $(xf)' = 0$ e portanto f está determinada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = c/x$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Convergência no sentido fraco

Definição Se $T_n, T \in \mathcal{D}'$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que T_n *converge fracamente para* T, e escrevemos $T_n \overset{\sigma}{\to} T$ se

$$T_n[\phi] \to T[\phi], \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Em particular, se $f_n, f \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$, então $\{f_n\} \xrightarrow{\sigma} \{f\}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Exemplo: Seja $f_n(x) = \cos(nx)$. Então $\{f_n\} \xrightarrow{\sigma} 0$.
De fato, se $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi'(x)|\mathrm{d}x.$$

Proposição. Se $\{T_n\} \subset \mathcal{D}'$, $T \in \mathcal{D}'$ e $T_n \xrightarrow{\sigma} T$ então $T_n^{(k)} \to T^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

A demonstração é imediata: se $\phi \in \mathcal{D}$ então

$$T_n^{(k)}[\phi] = (-1)^k T_n[\phi^{(k)}] \to (-1)^k T[\phi^{(k)}] = T^{(k)}[\phi]$$

já que $T_n \xrightarrow{\sigma} T$. □

Em particular, se $k \geq 0$ então $\{n^k \cos(nx)\}$, $\{n^k\,\mathrm{sen}\,(nx)\} \xrightarrow{\sigma} 0$.

Uma interpretação da “função” Delta

Consideremos agora a função $\eta_{-1,1}(x)$ e seja

$$\chi(x) \doteq \frac{1}{a}\eta_{-1,1}(x), \quad a \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{-1,1}(x)\mathrm{d}x.$$

Formemos agora a família

$$\chi_n(x) = n\chi\left(nx\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Se $\phi \in \mathcal{D}$

$$\{\chi_n\}\left[\phi\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(x)\phi(x)\mathrm{d}x = n\int_{-\infty}^{\infty} \chi\left(nx\right)\phi(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\phi\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x.$$

Portanto, raciocinando como antes

$$\{\chi_n\}[\phi] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(0),$$

isto é

$$\chi_n \overset{\sigma}{\to} \delta \text{ quando } n \to \infty.$$

Pode-se mostrar o seguinte resultado fundamental:

Teorema. Se $T \in \mathcal{D}'$ então existe uma sequência $\phi_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\{\phi_n\} \overset{\sigma}{\to} T$ quando $n \to \infty$. Em outras palavras $\mathcal{D}$ é 'denso' em $\mathcal{D}'$.

Uma conexão com análise complexa

Neste parágrafo assumiremos que todas as funções são a valores complexos. Tudo o que foi descrito antes se estende facilmente a esta nova situação, notando-se agora que os elementos de $\mathcal{D}'$ são funcionais $\mathbb{C}$-lineares.

Nosso objetivo agora é dar um significado para a conhecida fórmula

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{x+iy} \doteq \frac{1}{x+i0^+}\,.$$

Para tal seja $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} :\ y > 0\}$. Então

$$\log z = \log|z| + i \arg z, \quad -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$$

é analítica (complexa) em H. Logo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log z = \frac{1}{z}, \quad z \in H,$$

e também sua restrição a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é dada por

$$\log x = \log|x| - i\pi(H(x) - 1), \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

Em particular $\log x \in \mathcal{L}$ e portanto podemos definir

$$\frac{1}{x+i0^+} \doteq \{\log x\}' = \mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\} - i\pi\delta(x).$$

Note agora que para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado temos

$$x \mapsto \frac{1}{x+i/n} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

O próximo resultado responde então à nossa questão:

Proposição. Vale a fórmula

$$\left\{\frac{1}{x+i/n}\right\} \overset{\sigma}{\to} \mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\} - i\pi\delta(x), \tag{2}$$

que é equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x+i/n}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x - i\pi\phi(0).$$

Demonstração. Sejam $G(z) = z\log z$ e

$$F_n(x) = G(x+i/n) - x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Então $F_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$ e

$$F_n''(x) = 1/(x+i/n).$$

Logo bastará mostrar que $\{F_n\} \xrightarrow{\sigma} \{x\log x - x\}$ ou que

$$\{G(x+i/n)\} \xrightarrow{\sigma} \{x\log x\}.$$

Mais precisamente, precisamos então mostrar que se $\phi\in\mathcal{D}$ então

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} G(x+i/n)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty}(x\log x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Agora a função G definida em $\mathbb{C}\setminus\{iy : y\le 0\}$ se estende continuamente até a origem (definindo $G(0)=0$). Assim, por continuidade uniforme, $G(z+i/n)\to G(z)$ quando $n\to\infty$ uniformemente sobre os subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\{iy : y<0\}$. Em particular $G(x+i/n)\to G(x)$ quando $n\to\infty$ uniformemente sobre um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ para o qual ϕ se anula em seu complementar. Desta propriedade segue (2) e a conclusão da proposição. $\square$

Observação: Raciocinando analogamente no semi-plano $y<0$ obtemos

$$\frac{1}{x+i0^-} = \mathrm{VP}\left\{\frac{1}{x}\right\} + i\pi\delta(x),$$

de onde vem então a conhecida fórmula de representação do delta de Dirac:

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{x+i0^-} - \frac{1}{x+i0^+}\right\} = \delta(x).$$

- - - - - ooo - - - - -