MAP 5902 - 1o. Semestre de 2019

8a. lista de exercícios

1. Para cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ descritos pelas equações abaixo determine seus pontos mais próximos da origem:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \cdot b \cdot c \neq 0)\,.$$

2. Se $p, q > 0$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mostre que o mínimo de

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad x, y > 0$$

sujeito a $xy = 1$ é igual a 1.

3. Usando o exercício anterior mostre que se a e b são números não negativos e p e q são como acima, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em que condições vale a igualdade?

4. Se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais não negativos, mostre que a média geométrica desses números é menor ou igual à média aritmética. Em que condições vale a igualdade?

5. Determine os valores máximo e o mínimo da função $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$ na região $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Determine os valores máximo e o mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ na esfera $\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

7. Seja P_2 o conjunto dos polinômios reais de grau ≤ 2 e defina $J : P_2 \to \mathbb{R}$ por

$$J(f) = \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Defina também Q como sendo o subconjunto dos elementos de P_2 que valem um quando $x = 1$. Mostre que J tem mínimo em Q e calcule o ponto onde o mínimo é assumido.

8. (Forma local das submersões) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{M+N}$ aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Defina $A = f'(x_0, y_0)$ e suponha que $A_y \in GL(\mathbb{R}^N)$. Mostre que existem

- $U \subset \Omega$ aberto, $(x_0, y_0) \in U$;
- $V \subset \mathbb{R}^M$ aberto, $x_0 \in V$;
- $W \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f(x_0, y_0) \in W$;
- $h : V \times W \to U$ uma bijeção com h e h^{-1} de classe C^1

tais que $(f \circ h)(x, y) = (x_0, y)$ para todo $(x, y) \in V \times W$.