**MAP 5902 - 1o. Semestre de 2019**

**7a. lista de exercícios**

**1.** Mostre que as equações

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{cases}$$

determinam funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ de classe $C^1$ em um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $(2,-1)$ satisfazendo $u(2,-1) = 2$, $v(2,-1) = 1$. Calcule as derivadas parciais de $u$ e $v$ no ponto $(2,-1)$.

**2.** Considere a equação

$$e^{2x-y} + \cos(x^2 + xy) - 2 - 2y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

O conjunto das soluções desta equação próximo de $(0,0)$ define, implicitamente, uma das variáveis como função da outra? Se sim, determine a(s) derivada(s) desta(s) função(ões) na origem.

**3.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2y + e^x + z$. Mostre que existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ contendo o ponto $(0,1,-1)$, um aberto $W \subset \mathbb{R}^2$ contendo o ponto $(1,-1)$ e uma função $g : W \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que $g(1,-1) = 0$ e

$$\{(x,y,z) \in U : \, f(x,y,z) = 0\} = \{(g(y,z), y, z) : \, (y,z) \in W\}.$$

Determine

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,-1), \qquad \frac{\partial g}{\partial z}(1,-1).$$

**4.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, $f(t) > 0$ para todo $t \in [0,1]$. Suponha que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 3.$$

Mostre que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall y \in [0,\delta[, \ \exists!\, g(y) \in [0,1] : \int_y^{g(y)} f(t)\mathrm{d}t = 2.$$

Qual a regularidade da função $y \mapsto g(y)$? *Sugestão*: defina $F(x,y) = \int_y^x f(t)\mathrm{d}t$.

**5.** Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável na origem. Suponha que $f(0) = 0$ e que $f'(0)$ seja inversível. Mostre que existe um aberto $V \subset U$, $0 \in V$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$.

**6.** Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável na origem. Suponha que $f(0) = 0$ e que $\lambda \in \mathbb{R}$ não seja um auto-valor de $f'(0)$. Mostre que existe um aberto $V \subset U$, $0 \in V$, tal que $f(x) \neq \lambda x$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$.