MAP 5902 - 1o. Semestre de 2019

6a. lista de exercícios

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1. Suponha que $f'(x)$ seja inversível, $\forall x \in \Omega$. Mostre que $f(\Omega)$ é aberto em $\mathbb{R}^N$.

2. Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Mostre que $f'(x,y)$ é inversível, $\forall (x,y) \in \Omega$, e que f não é injetora em Ω. Compare com o Teorema da Função Inversa.

3. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1. Suponha que f seja uma bijeção de $\mathbb{R}^N$ sobre $\mathbb{R}^N$ com inversa contínua. É verdade que a inversa de f também é de classe C^1?

4. Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > x_2\}$ e defina $f : U \to \mathbb{R}^2$ por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2)$.

a) Mostre que se pode aplicar o Teorema da Função Inversa para f em cada ponto de Ω;

b) Determine $f(\Omega)$ e mostre que $f : \Omega \to f(\Omega)$ é uma bijecão.

5. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ diferenciável e suponha que exista $\lambda < 1$ tal que $\|f'(x)\| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Mostre que existe um único $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(x_0) = x_0$

6. Seja $\phi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma sequência de contrações, $\phi_n \to \phi$ pontualmente em $\mathbb{R}^N$. Mostre que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

7. Sejam $r > 0$ e $K = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r\}$. Seja, também, $f : K \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|, \quad x, y \in K;$$

$$|f(0)| \leq \frac{2}{3}r.$$

Mostre que existe um único $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = x_0$.