MAP5902 - 1o. Semestre de 2019

5a. lista de exercícios

1. Sejam $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $(a_{1j})_{1\leq j\leq N}$ a matrix de A relativa à base canônica de $\mathbb{R}^N$. Mostre que

$$\|A\| = \left\{ \sum_{j=1}^{N} a_{1j}^2 \right\}^{1/2}.$$

2. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que as derivadas parciais $\partial f / \partial x_j$ existem e são *limitadas* em Ω, $j = 1, \ldots, N$. Mostre que f é contínua em Ω.

3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em Ω. Suponha que f tenha um máximo local em $x_0 \in \Omega$. Mostre que $f'(x_0) = 0$.

4. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ diferenciável no ponto $x_0 \in \Omega$. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e defina $\Theta : B_\delta(0) \to \mathbb{R}^M$ pela regra

$$\Theta(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h.$$

Mostre que Θ é diferenciável na origem.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f(0, 0) = 0$ e

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$. Mostre também que todas as derivadas direcionais de f se anulam na origem mas que f não é diferenciável na origem.

6. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pela regra

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \operatorname{sen}\left(x_2^2 / x_1\right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x_1 = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é contínua na origem e que existem todas as derivadas direcionais de f na origem. f é diferenciável na origem?

7. Dado $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto seja $f : U \to \mathbb{R}^M$ diferenciável em $x_0 \in U$. Prove que se $v_k \to v$ em $\mathbb{R}^N$ e se $t_k \to 0$ em $\mathbb{R}$ ($t_k \neq 0$) então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + t_k v_k) - f(x_0)}{t_k} = f'(x_0)v.$$