## MAP5902 - 1o. Semestre de 2019

## 4a. lista de exercícios

**1.** Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua e $K \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto. É verdade que $f^{-1}(K)$ é fechado em $\mathbb{R}^N$? É verdade que $f^{-1}(K)$ é compacto em $\mathbb{R}^N$?

**2.** Uma função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é *própria* se $|f(x)|$ tende para infinito quando $|x|$ tende para infinito, isto é, se para todo $C > 0$ existe $R > 0$ tal que $|x| > R \Rightarrow |f(x)| > C$.

- Mostre que se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é própria e contínua então a imagem inversa por $f$ de um compacto de $\mathbb{R}^M$ é também um compacto de $\mathbb{R}^N$.
- Mostre que se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é própria e contínua então $|f|$ atinge seu mínimo.

**3.** Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ contínua. Mostre que o gráfico de $f$

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : x \in \mathbb{R}^N\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

**4.** Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua e suponha que exista $\kappa > 0$ tal que

$$|x - y| \le \kappa |f(x) - f(y)|, \; x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Mostre que $f$ é injetora, que $f(\mathbb{R}^N)$ é fechado em $\mathbb{R}^N$ e que a inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ é contínua.

**5.** Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Mostre que $f$ é contínua se, e somente se, para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ tem-se $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$. Através de um exemplo, mostre também que a inclusão pode ser própria.

**6.** Sejam $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ funções contínuas. Suponha que exista $E \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\bar{E} = \mathbb{R}^N$ e $f|_E = g|_E$. Mostre então que $f = g$.

**Definição.** Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é *uniformemente limitada* se existe $C > 0$ tal que $|f_n(x)| \le C$ para $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

**7.** Mostre que uma sequência de funções limitadas que converge uniformemente é uniformente limitada.

**8.** Sejam $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sequências de funções que convergem uniformemente. Mostre que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Mostre, ainda, que se $f_n$ e $g_n$ são limitadas para todo $n \in \mathbb{N}$ então $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

**9.** Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

converge uniformente em qualquer intervalo limitado, mas não converge absolutamente para qualquer valor de $x$.

**10.** Defina $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela regra

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e que a relação

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

é válida para $x \neq 0$, mas falsa para $x = 0$.

- - - - o o o - - - -