

Comentário sobre o exercício C da lista 3

(A) Seja E um ELC Hausdorff. Diremos que E satisfaz a propriedade (B) se existir uma sequência B_n , $n = 1, 2, \dots$ de subconjuntos limitados de E tal que $B_n \subset B_{n+1}$ para todo n e

- Dado $B \subset E$ limitado existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset B_n$.

(B) E satisfaz (B) se, e somente se, E'_b é metrizável.

Se E satisfaz a condição (B) então dada $\{B_n\}$ como em (A) segue que $\{B_n^\circ\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças da origem em E'_b com $\cap B_n^\circ = (\cup B_n)^\circ = E^\circ = \{0\}$. Reciprocamente suponha que E'_b seja metrizável e seja $\{V_n\}$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças da origem em E'_b , com $V_n \supset V_{n+1}$ para todo n . Então cada $B_n = V_n^\circ$ é limitado em E , $B_n \subset B_{n+1}$. Além do mais, se B é limitado em E então B° é uma vizinhança de 0 em E'_b e, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset B^\circ$. Assim $B \subset B^{\circ\circ} \subset B_n$, o que conclui a demonstração. \square

(C) Seja E um espaço LB ; logo E é um espaço LF com uma sequência de definição $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ onde cada E_n é um espaço de Banach. Seja $\|\cdot\|_n$ a norma em E_n . Vamos assumir, para simplificar, que $\|\cdot\|_{n+1} = \|\cdot\|_n$ em E_n . Defina $B_n \subset E$ como sendo a imagem da bola $\{x \in E_n : \|x\|_n \leq n\}$ pela aplicação $E_n \hookrightarrow E$. Cada B_n é limitado em E . Por outro lado, dado $B \subset E$ limitado existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \subset E_n$ e B é limitado em E_n (exercício F da lista 2). Assim existe $r > 0$ tal que $B \subset \{x \in E_n : \|x\|_n \leq r\}$, donde $B \subset B_m$ se $m \geq \max\{r, n\}$. Logo E satisfaz (B) e, portanto, E'_b é metrizável.

(D) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então $C(\Omega)$ é um ELC que satisfaz as hipóteses acima. Assim o resultado enunciado no exercício C da lista 3 não está correto. É simples ver que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), porém a implicação (3) \Rightarrow (1) é falsa pelo exemplo acima. Porém, vale a seguinte implicação:

Exercício. Se E é um ELC tal que ambos E e E_b são metrizáveis então E é normado.