MAP5902 - 1o. Semestre de 2019

3a. lista de exercícios

1. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais, ambas convergindo para o mesmo limite c. Considere agora uma terceira sequência (z_n) tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n. Mostre que (z_n) também converge para c.

2. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}^N$. Suponha que $x_n \to 0$ e que (y_n) seja limitada. Mostre que a sequência de números reais $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 em $\mathbb{R}$.

3. Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Mostre que a convergência de (x_n) implica a convergência de $(|x_n|)$. A recíproca é verdadeira?

4. Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ não-descrescente, isto é, satisfazendo $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é convergente se, e somente se, (x_n) é limitada.

5. Dado $E \subset \mathbb{R}^N$ limitado definimos o *diâmetro de E* como sendo o número real

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}.$$

Mostre que $\operatorname{diam}(E) = \operatorname{diam}(\bar{E})$.

6. Seja (E_n) uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Suponha cada E_n compacto e não vazio, que $E_n \supset E_{n+1}$ para todo n e que $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$. Mostre que $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ é um conjunto unitário.

7. Seja (p_n) uma sequência em $\mathbb{R}^N$. Considere o subconjunto E de $\mathbb{R}^N$ formado por todos os limites de subsequências de (p_n) que são convergentes. Mostre que E é fechado em $\mathbb{R}^N$.