MAP5902 - 1o. Semestre de 2019

2a. lista de exercícios

1. Seja $A \subset \mathbb{R}^N$. Mostre que A é limitado se, e somente se, $\bar{A}$ é compacto.

2. Dado $G \subset \mathbb{R}^N$ aberto defina sua *fronteira*, ∂G, como sendo $\partial G = \bar{G} \setminus G$. Mostre que ∂G é fechado em $\mathbb{R}^N$ e que ∂G é compacto se G é limitado. Mostre também que

$$\mathbb{R}^N = G \cup \partial G \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^N \setminus G),$$

onde a reunião é disjunta.

3. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}.$$

Mostre que F e G são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^2$. Estes conjuntos são compactos?

4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$ e $B \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos compactos. Mostre que $A \times B \subset \mathbb{R}^{M+N}$ é um conjunto compacto. Lembre que

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} : \, x \in A, \, y \in B\}.$$

5. Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto não vazio. Dado $a \in \mathbb{R}^N$ mostre que existe $p \in K$ tal que $d(a, K) = d(a, p)$. Tal ponto p, que realiza a distância de a a K, é único?

6. Sejam F um conjunto fechado não vazio de $\mathbb{R}^N$ e $a \in \mathbb{R}^N$. Existe $p \in F$ tal que $d(a, F) = d(a, p)$?