MAP5902 - 1o. Semestre de 2019

1a. lista de exercícios

1. Seja $E \subset \mathbb{R}^N$. Mostre que E' é fechado. Mostre também que $E' = (\overline{E})'$. É verdade que $E' = (E')'$?

2. Mostre que

- Se $A, B \subset \mathbb{R}^N$ então $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Se $\{A_n\}$ é uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ e se $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \overline{B}$. Mostre também, através de um exemplo, que a inclusão pode ser própria.
- Se $A, B \subset \mathbb{R}^N$ então é verdade que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

3. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente. Mostre que $\sup A \in \overline{A}$.

4. Dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $A \subset \mathbb{R}^N$ defina a *distância de x a A* como sendo o número real

$$d(x, A) \doteq \inf\{|x - a| : a \in A\}.$$

Mostre que $d(x, A) = 0$ se, e somente se, $x \in \bar{A}$. Mostre também que se $x, y \in \mathbb{R}^N$ então

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

5. Seja $\mathbb{Q}^N = \{(a_1, \cdots, a_N) : a_j \in \mathbb{Q},\ j = 1, \cdots, N\}$. Determine o fecho de $\mathbb{Q}^N$.

6. Seja

$$A = \{\frac{m}{2^n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que dados $r < s$ números reais existe $a \in A$, $r < a < s$. Conclua que $\overline{A} = \mathbb{R}$.

7. Dado $G \subset \mathbb{R}^N$ definimos o *interior* de G como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in G$ para os quais existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset G$. Denotamos por $\mathrm{int}(G)$ o interior de G.

1. Mostre que $\mathrm{int}(G)$ é aberto em X.
2. Mostre que G é aberto se, e só se, $G = \mathrm{int}(G)$.

3. Mostre que se $E \subset G$ e se E é aberto então $E \subset \text{int}(G)$.
4. Mostre que $\text{int}(G)$ é igual à reunião de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$ contidos em G.

8. Dados os subconjuntos A de $\mathbb{R}^N$ abaixo determine $\text{int}(A)$, A', $\bar{A}$. Determine também se são abertos, fechados e limitados.

$A = \{0\}, \quad A = \{x : |x| < 1\}, \quad A = \{x : |x| = 1\}, \quad A = \{x : |x| \geq 1\} \cup \{0\}.$

- - - - - - o o o - - - - - - -