MAP5919 - 1o. Semestre de 2017

6a. Lista de exercícios - Completamento de um ELC

A. Sejam E um ELC e $\{T_i\}_{i\in I}$ uma família de aplicações lineares contínuas $T_i : E \to E_i$, onde cada E_i é também um ELC. Suponha que

1. Dada $U \in \Phi_E(0)$ existe $i \in I$ e $V_i \in \Phi_{E_i}(0)$ tal que $T_i^{-1}(V_i) \subset U$;
2. $\bigcap_{i\in I} \ker T_i = \{0\}$.

Mostre então que a aplicação $x \mapsto \{T_i x\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ define um isomorfismo topológico entre E e um subespaço de $\prod_{i\in I} E_i$.

B. Seja $\{E_i\}_{i\in I}$ uma família de ELCs, cada um deles completo. Mostre que $\prod_{i\in I} E_i$ também é completo.

C. Seja E um ELC Hausdorff e $\mathcal{B}_0$ um sistema fundamental de vizinhanças da origem em E constituído por tonéis. Para cada $U \in \mathcal{B}_0$ considere p_U a semi-norma contínua em E dada por $U = B[p_U]$ e seja E_U o espaço de Banach obtido pelo completamento do espaço normado $E/\ker p_U$. Através da composições $E \to E/\ker p_U \hookrightarrow E_U$ mostre que existe um isomorfismo topológico entre E e um subespaço de $\prod_{U\in\mathcal{B}_0} E_U$. Conclua que existe um ELC Hausdorff que é um completamento de E.

D. Seja E um ELC Hausdorff e suponha que qualquer funcional linear $\phi : E' \to \mathbb{K}$ que é $\sigma(E', E)$-contínuo sobre cada subconjunto equicontínuo de E' é necessariamente $\sigma(E', E)$-contínuo, isto é, $\phi(x') = \langle x', x\rangle$ para algum $x \in E$. Mostre que E é completo

Sugestão: Seja $\hat{E}$ o completamento de E e identifique os duais $\hat{E}'$ e E' através do isomorfismo $\hat{E}' \to E'$, $\phi \mapsto \phi|_E$. Mostre que as topologias $\sigma(E', \hat{E})$ e $\sigma(E', E)$ coincidem sobre os equicontínuos de E'.

Observação: vale a recíproca deste fato. Veja [Kelley, J.L. e Namioka, I., Linear Topological Spaces, Graduate Texts in Mathematics no. 36, Springer, 1963, p. 156.]