MAP5919 - 1o. Semestre de 2017

5a. Lista de exercícios

A. Sejam E, F ELCs Hausdorff. Mostre que toda aplicação linear contínua entre E e F é fracamente contínua, isto é, que vale a inclusão $L(E, F) \subset L(E_{\sigma(E,E')}, F_{\sigma(F,F')})$.

B. Mostre que todo espaço de Banach é isometricamente isomorfo a um subespaço fechado de $C(K)$ para algum compacto K.

C. (Mackey) Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre que existe $u \in L(\ell_\infty(\mathbb{N}), E)$ injetora. Sugestão: construa uma sequência de subespaços fechados $E = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ tais que $\dim E_n = \infty$ para todo n e uma sequência $\{x_n\}$ em E com $x_n \in E_{n-1} \setminus E_n$ e $\|x_n\| \leq 1/n$. Defina $u(\{\lambda_n\}) = \sum \lambda_n x_n$.

D. Seja E um espaço de Fréchet e suponha que E não seja reflexivo. Mostre que E é de primeira categoria em E''.

E. Sejam E, F ELCs Hausdorff e suponha que a topologia de F seja a topologia de Mackey $\tau(F, F')$. Mostre que se $u \in L(E, F)$ é sobrejetora e se ${}^t u(F')$ é $\sigma(E', E)$-fechada então u é um homomorfismo.

F. Sejam E e F ELCs Hausdorff, cada um deles o dual forte de um espaço de Fréchet reflexivo e $u \in L(E, F)$. Mostre que u é um homomorfismo se, e somente se, ${}^t u(F')$ é fracamente fechado.

G. Considere a aplicação $\mathfrak{T} : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_N]]$ definida por $\mathfrak{T}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} (\partial^\alpha f)(0) X^\alpha / \alpha!$. Mostre que $\mathfrak{T}$ é sobrejetora. Para isto prove que ${}^t\mathfrak{T}$ é injetora e que ${}^t\mathfrak{T}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n])$ é fracamente fechado em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Este resultado diz então que qualquer série formal de potências em N indeterminadas e com coeficientes complexos é a série formal de Taylor de alguma função infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^N$.

H. Sejam X um espaço métrico e E um espaço de Montel. Seja $\lambda : X \to E$ e suponha que $f \circ \lambda : X \to \mathbb{K}$ seja contínua, para todo $f \in E'$. Mostre que λ é contínua.