MAP5919 - 1o. Semestre de 2017

4a. Lista de exercícios

A. Mostre que se E é um ELC Hausdorff reflexivo então E'_b também é reflexivo. Conclua então que E é reflexivo se, e somente se, E é semi-reflexivo e tonelado

Definição: Um subconjunto A convexo e equilibrado de um ELC Hausdorff E *absorve os limitados de* E se dado B limitado então existe $\rho > 0$ tal que $B \subset \rho A$. Dizemos que E é um *espaço bornológico* se todo subconjunto de E que absorve os limitados é necessariamente uma vizinhança da origem.

B. Mostre que se E é metrizável então E é bornológico. Mostre, em particular, que existem espaços bornológicos que não são tonelados (existem também ELC tonelados que não são bornológicos, mas isto é bem mais difícil).

C. Sejam E um espaço bornológico, F um ELC e $u : E \to F$ linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $u \in L(E, F)$;
2. Dado $B \subset E$ limitado então $u(B) \subset F$ é limitado.

D. Topologia produto:

- Seja $\{E_i\}_{i \in I}$ uma família de ELC's e considere o produto $E = \prod_{i \in I} E_i$. Seja $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}(E)$ formado por todos os conjuntos da forma $\prod_{i \in I} V_i$, onde $V_i \in \Phi_{E_i}(0)$ é convexa e equilibrada e $\{i \in I : V_i \neq E_i\}$ é finito. Mostre que existe uma topologia de ELC sobre E para a qual $\mathcal{B}_0$ define um sistema fundamental de vizinhanças da origem. Logo, a topologia inicial em E definida pelas projeções $E \to E_i$ é uma topologia de ELC.
- Mostre que se I é enumerável e se cada E_i é metrizável (resp. Fréchet) então E é metrizável (resp. Fréchet).

E. Seja E um espaço LB com sequência de definição $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ (cada espaço E_n é um espaço de Banach). Mostre que E' é um espaço de Fréchet.

Sugestão: Dada $u \in E'$ considere $\{u|_{E_n}\} \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n'$.

F. Determine o dual de um espaço LF.

G. Considere a forma bilinear $\mathfrak{b} : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m] \times \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_m]] \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\mathfrak{b}\left(\sum_{\alpha} p_\alpha X^\alpha, \sum_{\beta} c_\beta X^\beta\right) = \sum_{\alpha} p_\alpha c_\alpha \,.$$

Mostre que $\mathfrak{b}$ permite identificar

$$\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_m]]' = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m], \ \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m]' = \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_m]].$$