MAP5919 - 1o. Semestre de 2017

3a. Lista de exercícios

A. Seja $C \subset \mathbb{R}[X]$ o conjunto de todos os polinômios $p(X) = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ com $a_d > 0$, $d = 0, 1, \ldots$ Mostre que C é convexo mas que não existe $f \in \mathbb{R}[X]^*$ tal que $f > 0$ em C. Em particular os convexos C e $-C$ não podem ser separados por um hiperplano.

Em todos os exercícios abaixo E denota um ELC Hausdorff.

B. Mostre que E tem dimensão finita se, e só se, E'_σ é normado.

C. Mostre que são equivalentes as seguintes propriedades:

1. E é normado;
2. E'_b é normado;
3. E'_b é metrizável.

D. Suponha que E seja um espaço LF e seja $\{E_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de definição de E. Suponha também que cada E_n tenha dimensão finita (exemplo: $E = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$). Mostre os seguintes fatos:

1. $E' = E^*$;
2. Em E' as topologias $\sigma(E', E)$ e $b(E', E)$ coincidem;
3. $E'_\sigma = E'_b$ é um espaço de Fréchet.

E. Suponha que E seja um espaço LF e seja $\{E_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de definição de E. Mostre que são equivalentes as seguintes propriedades:

1. Cada E_n é normado;
2. E'_b é um espaço de Fréchet.