MAP5919 - 1o. Semestre de 2017

2a. Lista de exercícios

A. Aqui você deve assumir o seguinte resultado: *se $P(D)$ é um ODPL com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^N$ e se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $P(D)u = 0$ então $u = 0$.* O objetivo do exercício é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto para o qual $P(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ é sobrejetora então vale a seguinte propriedade:*

- *Dado $K \subset \Omega$ compacto existe $K_1 \subset \Omega$ compacto tal que se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que* $\operatorname{supp} P(-D)\phi \subset K$ *então* $\operatorname{supp} \phi \subset K_1$.

Para a demonstração siga os passos abaixo:

1. Fixado K como no enunciado seja
$$F = \{\phi \in C_c^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} P(-D)\phi \subset K\}$$
munido da topologia de ELC definida pelas semi-normas
$$\phi \mapsto \sum_{|\alpha| \le m} \sup |\partial^\alpha P(-D)\phi|,$$
$m = 1, 2, \ldots$. Mostre que F é metrizável.

2. Considere a forma bilinear
$$B : C^\infty(\Omega) \times F \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad B(f, \phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$
Mostre que, para cada $\phi \in E$ fixada, $f \mapsto B(f, \phi)$ é contínua e que a sobrejetividade da aplicação $P(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ implica que, para $f \in C^\infty(\Omega)$ fixada, $\phi \mapsto B(f, \phi)$ é contínua.

3. Conclua que B é contínua. Escrevendo explicitamente, em termos de semi-normas, o que esta continuidade significa demonstre o teorema.

B. Um espaço vetorial topológico E é *tonelado* se todo subconjunto fechado, absorvente, equilibrado e convexo (isto é, todo tonel) de E é uma vizinhança da origem em E. Um espaço vetorial topológico E é um *espaço de Baire* se a união de qualquer sequência de subconjuntos fechados de E, cada um deles com interior vazio, tem interior vazio.

1. Mostre que todo espaço de Baire é tonelado. Conclua que todo espaço de Fréchet é tonelado.

2. Mostre que se E é um espaço LF então E não é de Baire mas é tonelado.

3. Sejam E um ELC tonelado, F um ELC e $\Phi \subset L(E, F)$. Mostre que Φ é equicontínuo se, e só se, para todo $x \in E$ o conjunto $\{Tx : T \in \Phi\}$ é limitado em F.

4. Dê exemplo de um espaço normado que não seja tonelado.

C. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ o conjunto das (classes de equivalência de) funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que são Lebesgue-mensuráveis e que satisfazem $\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ para todo $K \subset \Omega$ compacto. Mostre que $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é um espaço de Fréchet com a topologia de ELC definida pelas semi-normas

$$p_K(f) = \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

D. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Definimos o suporte de f como sendo o complementar em Ω do maior subconjunto aberto $U \subset \Omega$ para o qual $\int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0$ para toda $\phi \in C^\infty_c(U)$. Defina $L^1_c(\Omega)$ como sendo o espaço formado por todos elementos de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ com suporte compacto. Mostre que $L^1_c(\Omega)$ tem uma topologia natural de espaço LF.

E. Sejam E, F espaços LF, $\{E_n\}, \{F_n\}$ sequências de definição de E e F respectivamente e $u \in L(E, F)$. Mostre que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u(E_m) \subset F_n$.

F. Sejam E um espaço LF e $\{E_n\}$ uma sequência de definição de E. Mostre que $B \subset E$ é limitado em E se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset E_n$ e B é limitado em E_n.