MAP5919 - 1o. Semestre de 2017

1a. Lista de exercícios

A. Dê um exemplo de um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, com $0 \in A$, que seja absorvente mas que não seja uma vizinhança de 0.

B. Sejam I e J conjuntos dirigidos. Defina uma ordem em $I \times J$ pela regra $(i, j) \preceq (i', j')$ se $i \preceq i'$ e $j \preceq j'$. Mostre que com esta relação $I \times J$ também é um conjunto dirigido. Sejam agora $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ nets em um conjunto X e sejam também $p : I \times J \to I$ e $q : I \times J \to J$ as projeções correspondentes. Mostre que $(x_{p(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$ e $(y_{q(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$ são subnets de $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_j)_{j\in J}$ respectivamente. Use esta observação para mostrar que o fecho de um subespaço em um EVT é também um subespaço.

C. Sejam E um EVT e $M \subset E$ um subespaço de E. Dizemos que um subespaço N de E é um *suplementar topológico de* M se a aplicação

$$M \times N \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$$

é um homeomorfismo, i.e., um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais com inversa contínua. Mostre que N é um suplementar topológico se, e somente se, a restrição de $M \xrightarrow{\pi} E/M$ a N define um homeomorfismo entre N e E/M. Mostre também que isto ocorre se existir $p : E \to E$ linear contínua tal que $p^2 = p$ e $p(E) = M$.

D. Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, M um subespaço de E. Mostre que

1. Se p é uma semi-norma sobre E então $\dot{p} : E/M \to [0, \infty[$ definida por

$$\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{x\in\dot{x}} p(x), \quad \dot{x} \in E/M,$$

   é uma semi-norma sobre E/M.

2. Suponha que E seja um ELC. Mostre que E/M com a topologia quociente é também um ELC. Suponha ainda que a topologia de E seja definida por uma coleção de semi-normas $\mathcal{P}$. Mostre que a topologia de E/M é então definida pela coleção de semi-normas $\{\dot{p} : p \in \mathcal{P}\}$.

3. Suponha que E seja um espaço de Fréchet e que M seja fechado em E. Mostre que E/M é um espaço de Fréchet.

E. Seja E um EVT e E^* seu dual algébrico, i.e., o espaço de todos os funcionais lineares (não necessariamente contínuos) $x^* : E \to \mathbb{K}$. Mostre que existe uma topologia de EVT sobre E^* para a qual os conjuntos

$$\mathcal{V}(S, \varepsilon) = \{x^* \in E^* : \sup_{x \in S} |x^*(x)| < \varepsilon\},$$

quando S percorre a família de todos os subconjuntos finitos de E e $\varepsilon > 0$, forma um sistema fundamental de vizinhanças da origem. Mostre que E^* é completo.

F. Podemos munir o espaço das séries formais de potências em N indeterminadas $\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_N]]$ de uma estrutura de álgebra se definirmos o produto de $S = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$ por $T = \sum_\beta b_\beta X^\beta$ como sendo a série formal de potências $S \cdot T = \sum_\gamma c_\gamma X^\gamma$, onde

$$c_\gamma = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} a_\alpha \, b_\beta \, .$$

Mostre que a aplicação produto

$$\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_N]] \times \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_N]] \ni (S, T) \to S \cdot T \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_N]]$$

é contínua.

G. Seja E um EVT sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $B \subset E$ é *limitado* se dada $V \in \Phi(0)$ existe $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda V$. Mostre que $B \subset E$ é limitado se, e só se, dadas $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in B$ e $r_n \in \mathbb{K}$, então $r_n \to 0$ em $\mathbb{K}$ implica $r_n x_n \to 0$ em E.

H. Mostre que se E é um ELC e se $B \subset E$ então B é limitado se, e somente se, a restrição a B de qualquer semi-norma contínua em E é uma função limitada. Se a topologia de E é definida por uma coleção de semi-normas $\mathcal{P}$ mostre então que B é limitado se, e somente se, a restrição a B de qualquer semi-norma em $\mathcal{P}$ é uma função limitada.

I. Seja E um ELC Hausdorff e suponha que exista $V \in \Phi_E(0)$ limitada. Mostre então que E é um espaço normado, isto é, sua topologia é definida por uma norma definida em E.

J. Seja E um EVT Hausdorff e $A, B \subset E$. Mostre as seguinte afirmações:

1. A, B limitados $\Longrightarrow$ $A + B$ limitado.

2. A, B compactos $\implies A + B$ compacto.

3. A compacto, B fechado $\implies A + B$ fechado.

4. Se E é um ELC então a envoltória convexa de um subconjunto limitado de E também é também um conjunto limitado.

K. Sejam E, F espaços localmente convexos metrizáveis e $T : E \to F$ linear. Mostre que T é contínua se, e somente se, dada qualquer sequência limitada em E sua imagem por T é uma sequência limitada em F.

L. Um ELC satisfaz a propriedade $(\star)$ se todo subconjunto fechado e limitado de E é compacto. Note que um espaço normado satisfaz $(\star)$ se, e só se, tem dimensão finita (por que?). Decida quais dos seguintes espaços abaixo satisfaz $(\star)$:

- $C^\infty(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto;
- $C^\ell(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $\ell \in \mathbb{Z}_+$;
- $\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_N]]$.