O Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani

(A) Sejam E um ELC Hausdorff e $A \subset E$ um subconjunto convexo. Uma aplicação $u : A \to A$ é *afim* se para todos $x, y \in A$ e todo $0 \leq t \leq 1$ tem-se $u(tx + (1-t)y) = tu(x) + (1-t)u(y)$. Em outras palavras u é afim se, e somente se, seu gráfico $G(u)$ é um subconjunto convexo de $A \times A$. Note também que se $u \in L(E)$ é tal que $u(A) \subset A$ então u é afim e contínua.

(B) Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani. *Sejam $K \subset E$ um subconjunto convexo, compacto e não vazio de E e Γ uma coleção de aplicações afins e contínuas em K. Se os elementos de Γ comutam dois a dois então existe $x_0 \in K$ tal que $u(x_0) = x_0$ para toda $u \in \Gamma$.*

Demonstração (D. Werner). Provaremos primeiramente que dada $u : K \to K$ afim e contínua então u admite um ponto fixo. De fato, suponha que não. Então $G(u)$ e $\Delta \doteq \{(x,x) \in E \times E : x \in K\}$ são subconjuntos convexos, compactos e disjuntos de $E \times E$ (note que $G(u)$ é convexo pois u é afim e fechado pois u é contínua). Pelo teorema de Hahn-Banach existirão então funcionais $\mathbb{R}$-lineares e contínuos $f, g : E \to \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) + g(x) \leq \alpha < \beta \leq f(x) + g(u(x)), \quad x \in K.$$

Assim

$$g(u(x)) - g(x) \geq \beta - \alpha, \quad x \in K.$$

Escrevendo $u^{(n)} = u \circ \cdots \circ u$ (n-vezes) e iterando o argumento obtemos

$$g(u^{(n)}(x)) - g(x) \geq n(\beta - \alpha), \quad x \in K,$$

de onde concluimos que $g(K)$ não pode ser limitado em $\mathbb{R}$, o que é uma contradição, pois $g : E \to \mathbb{R}$ é contínuo.

Denote por K_u o conjunto dos pontos fixos de u em K, o qual agora sabemos ser um subconjunto compacto, convexo e não vazio de K. Temos que mostrar que $\bigcap_{u \in \Gamma} K_u \neq \emptyset$. Para isto basta mostrar que $\bigcap_{i=1}^{n} K_{u_i} \neq \emptyset$ para um subconjunto finito $\{u_1, \ldots, u_n\}$ arbitrário de Γ. A afirmação já foi demonstrada para $n = 1$. Suponhamos então que $K' \doteq \bigcap_{i=1}^{n-1} K_{u_i} \neq \emptyset$. Como u_n comuta com $u_1, \ldots, u_{n-1}$ temos $u_n(K') \subset K'$. Agora K' é convexo, fechado (pois cada u_j é contínua) e não vazio donde, pelo que já foi provado, existe $x \in K'$ com $u_n(x) = x$. Assim $x \in K' \cap K_{u_n}$ de onde segue que $\bigcap_{i=1}^n K_{u_i} \neq \emptyset$. $\square$

(C) Daremos agora uma aplicação do teorema demonstrado em (B). Seja X um espaço topológico compacto e suponha definido sobre X uma família a um parâmetro $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de homeomorfimos de X. Assim para cada $t \in \mathbb{R}$ é dado um homeomorfismo ϕ_t de X. Assumimos que

$$\phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Teorema. *Existe uma medida de probabilidade μ definida sobre a σ-álgebra dos subconjuntos de Baire de X satisfazendo*

$$\mu(\phi_t(A)) = \mu(A),$$

igualdade esta válida para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $A \subset X$ Baire-mensurável.

Demonstração. Pelo teorema de Riesz o dual de $C(X;\mathbb{R})$ é o espaço $\mathcal{M}(X)$ das medidas de Baire com sinal e finitas sobre X. A norma em $\mathcal{M}(X)$ é dada por $\|\mu\| = |\nu|(X)$. Assim o conjunto convexo

$$K \doteq \{\mu : \mu \geq 0, \, \mu(X) = 1\}$$

é fracamente compacto em $\mathcal{M}(X)$, uma vez que K está contido na bola unitária de $\mathcal{M}(X)$ e é fracamente fechado.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ defina $\lambda_t : C(X) \to C(X)$, $\lambda_t(f) = f \circ \phi_t^{-1}$. Sua transposta ${}^t\lambda_t : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ é fracamente contínua e é dada por

$$\langle {}^t\lambda_t(\mu), f\rangle = \langle \mu, f \circ \phi_t^{-1}\rangle = \int_X f \circ \phi_t^{-1} \, \mathrm{d}\mu.$$

Então ${}^t\lambda_t(\mu) \geq 0$ se $\mu \geq 0$ e ${}^t\lambda_t(\mu)(X) = \langle {}^t\lambda_t(\mu), 1\rangle = \mu(X)$. Consequentemente $\lambda_t(K) \subset K$ para todo t. Como $\lambda_t \circ \lambda_s = \lambda_s \circ \lambda_t$ o teorema de Markov-Kakutani fornece $\mu \in K$ tal que

$${}^t\lambda_t(\mu) = \mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado $A \subset X$ Baire-mensurável e denotando por χ_A a função característica de A temos

$$\mu(A) = \int_X (\chi_A \circ \phi_t^{-1}) \mathrm{d}\mu = \mu(\phi_t(A)), \, t \in \mathbb{R},$$

o que conclui a demonstração. $\square$